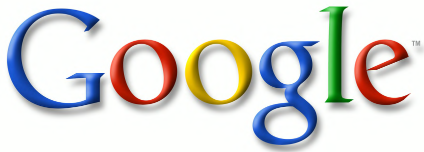
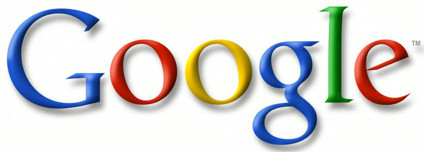




ACA1253
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B62746
035/2: : |a (CaOTULAS)160323833
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Antomari, Xavier, |d 1855-1902.
245:00: |a Leçons de cinématique et de dynamique suivies de la détermination des centres de gravité |b à l'usage des candidats à l'école polytechnique...
260: : |a Paris, |b Nony et cie, |c 1892.
300/1: : |a 232 p.
650/1: 0: |a Kinematics
650/2: 0: |a Statics
650/3: 0: |a Center of mass
998: : |c DPJ |s 9124

LEÇONS DE CINÉMATIQUE

ET DE DYNAMIQUE

SUIVIES DE LA

DÉTERMINATION DES CENTRES DE GRAVITÉ

A L'USAGE DES CANDIDATS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PAR

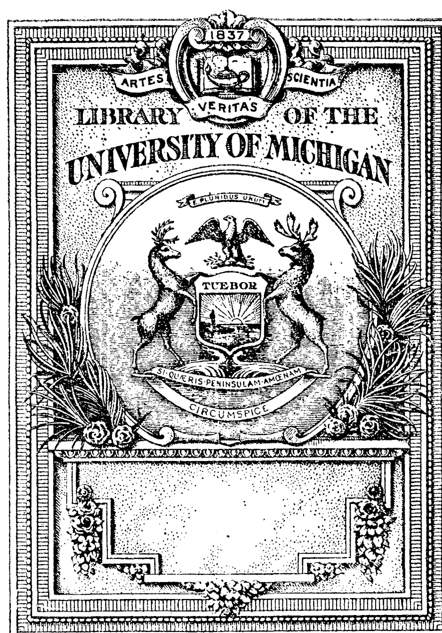
X. ANTOMARI

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
DIRECTEUR DES ÉTUDES
ET PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES A L'ÉCOLE MONGE

PARIS

LIBRAIRIE NONY & Cie
17, RUE DES ÉCOLES, 17

1892


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

LEÇONS DE CINÉMATIQUE

ET DE DYNAMIQUE

A LA MÊME LIBRAIRIE

LEÇONS DE STATIQUE

PAR

M. E. CARVALLO

EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Un vol. in-8°. . . . . 2 fr.

Alexander Ziwet

LEÇONS DE CINÉMATIQUE

ET DE DYNAMIQUE

SUIVIES DE LA

DÉTERMINATION DES CENTRES DE GRAVITÉ

A L'USAGE DES CANDIDATS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PAR

X. ANTOMARI

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
DIRECTEUR DES ÉTUDES
ET PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES A L'ÉCOLE MONGE

PARIS
LIBRAIRIE NONY & Cie
17, RUE DES ÉCOLES, 17

1892

PRÉFACE

Je me suis efforcé de rédiger ce livre en interprétant de mon mieux l'esprit du programme d'admission à l'École Polytechnique : c'est ainsi notamment que la règle de la composition des forces a été déduite des principes de la dynamique.

L'ouvrage, comme le programme d'admission à l'École Polytechnique, est divisé en trois parties : Cinématique du point matériel, Dynamique du point matériel et Statique du solide invariable libre. Je ne traite, dans cette dernière partie, que la détermination des centres de gravité, et je renvoie, pour le reste, aux *Leçons de Statique* de M. Carvallo. Ces leçons, publiées en 1884, répondent en tous points à la partie du programme qui concerne les corps solides : la méthode et les prin-

cipales démonstrations ont été adoptées, dans son cours, par M. Sarrau, dont l'autorité a été pour moi un encouragement à publier un livre formant avec celui de M. Carvallo un cours complet destiné aux candidats à l'École Polytechnique.

Deux méthodes s'offrent pour l'enseignement de la mécanique : la première, la plus ancienne, consiste à faire précéder l'étude du mouvement par celle de l'équilibre ; la deuxième consiste à procéder dans l'ordre inverse. J'ai adopté la deuxième, afin de me conformer à l'esprit du programme ; c'est la première qui a été suivie par M. Carvallo ; de sorte que les deux ouvrages sont, à ce titre, absolument distincts. Mais je ne crois pas qu'il puisse résulter de là aucun trouble pour la suite des idées ; au contraire il sera avantageux, pour le lecteur, d'avoir les deux méthodes à sa portée et de pouvoir les utiliser à tour de rôle, suivant la nature des questions. D'ailleurs, la règle de composition des forces une fois établie, il n'y a plus de distinction à faire entre les deux méthodes en ce qui concerne la statique du corps solide invariable.

Il m'a paru utile de débuter par quelques notions sur les vecteurs, dont l'introduction au début de la mécanique semble s'imposer, non seulement pour éviter la répétition fastidieuse des mêmes règles, mais aussi à cause de l'importance du vecteur considéré comme élément géométrique. La théorie des translations, la représentation géométrique des

couples, la réduction des forces appliquées à un corps solide, etc., mettent bien en évidence le rôle du vecteur et différentient nettement cet élément d'autres éléments géométriques avec lesquels on le confond souvent, tels que le segment de droite et la longueur géométrique qui représente une force. Un segment de droite est défini par deux points : son origine et son extrémité, et il ne peut y avoir égalité entre deux segments que s'il y a coïncidence des points de même nom. La longueur géométrique qui représente une force peut être déplacée sur la ligne d'action de la force, et il y a égalité entre deux forces quand elles ont même ligne d'action, même direction et même intensité. Enfin, le vecteur peut être déplacé parallèlement à lui-même à volonté, ainsi que cela résulte de la représentation d'un couple par un vecteur, car on peut déplacer un couple à volonté dans son plan ou dans tout plan parallèle : la définition de l'égalité de deux vecteurs est, en quelque sorte, une conséquence de cette propriété. On voit donc que ces trois éléments géométriques, segment, force et vecteur, bien qu'ayant la même origine, répondent à des idées absolument distinctes ; c'est la raison pour laquelle j'ai cru utile de faire un chapitre spécial sur les vecteurs.

Dans ce chapitre je donne quelques notions sur les produits géométriques de vecteurs introduits par M. Résal depuis fort longtemps, et sur lesquels M. Carvallo a récemment appelé l'attention, dans un

article inséré aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Je ne fais pas à la vérité un très grand usage de ces produits; mais leur utilité, dans beaucoup de questions, est assez manifeste pour justifier leur introduction dans l'enseignement et dans ce livre.

Paris, juillet 1892.

INTRODUCTION

---

1. Point matériel. — On appelle *point matériel* un point géométrique en lequel on suppose condensée de la matière obéissant aux lois habituelles de la nature. Nous considérerons les corps comme des assemblages de points matériels.

2. Mouvement et repos. — On dit qu'un corps est en *mouvement* quand il change de position par rapport à des points fixes ou supposés fixes ; il est dit au *repos* dans le cas contraire.

Un point en mouvement sera appelé un *mobile*.

3. Principe de l'inertie ; forces. — Une observation journalière nous apprend qu'un corps au repos y reste indéfiniment si aucune cause extérieure n'intervient pour l'en tirer ; plus généralement, nous *admettrons*, comme un principe régissant la matière (principe de l'inertie), que l'état de repos ou de mouvement des corps ne peut être modifié sans l'intervention de certaines causes extérieures qu'on appelle des *forces*.

L'existence des forces n'a rien d'hypothétique ; elle nous est révélée par une expérience de tous les instants : c'est ainsi que nous avons le sentiment d'un effort à exercer soit pour soulever un fardeau, soit pour soutenir un corps que

nous avons à la main et l'empêcher de tomber. Dans le premier cas, l'intervention d'une cause extérieure met le corps en mouvement ; dans le second cas, elle modifie le mouvement que prend, sous l'action de son poids, tout corps abandonné à lui-même à la surface de la terre.

Il peut arriver toutefois que l'action d'une force sur un corps ne modifie pas, du moins en apparence, son état de repos ou de mouvement : c'est ainsi, par exemple, que l'on peut exercer un effort sur un fardeau sans parvenir à le soulever.

D'après cela, nous appellerons *force* toute cause qui *modifie* ou *qui tend à modifier* l'état de repos ou de mouvement des corps.

Ajoutons que les forces paraissent très diverses par leur nature : effort musculaire, pesanteur, force électrique, etc.

4. **Objet et divisions de la mécanique.** — La *mécanique* a pour objet l'étude du mouvement et des forces qui le produisent. Pour cette étude, il n'est pas nécessaire de connaître la nature intime des forces ; il suffit qu'on puisse les comparer entre elles, c'est-à-dire les *mesurer*. Nous verrons plus loin comment on y parvient.

On divise la mécanique en deux parties : la *cinématique*, où l'on s'occupe du mouvement en faisant abstraction des forces qui le produisent, et la *dynamique*, où l'on s'occupe du mouvement et des forces.

Comme cas particulier de la dynamique, on étudie celui où le corps reste au repos sous l'action des forces qui agissent sur lui ; la partie de la mécanique qui s'occupe de ce cas particulier, d'ailleurs très important, porte le nom de *statique*.

Avant d'aborder l'étude de la mécanique, nous allons donner quelques notions sur les vecteurs.

PRÉLIMINAIRES

CHAPITRE UNIQUE

NOTIONS SUR LES VECTEURS

5. **Définitions sur les segments.** — Tout segment de droite AB (*fig.* 1) peut être parcouru par un mobile se déplaçant de A vers B ou de B vers A ; lorsque le mobile part du point A pour aboutir au point B, A s'appelle *l'origine* et B *l'extrémité* du segment.

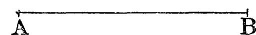


Fig. 1

Pour rappeler quelle est l'origine et quelle est l'extrémité d'un segment, on *convient* de le désigner par deux lettres, en mettant au premier rang la lettre qui est à l'origine ; par exemple le segment AB (*fig.* 1) est un segment qui a pour origine le point A et pour extrémité le point B, tandis que le segment BA (*fig.* 1) a pour origine le point B et pour extrémité le point A.

On appelle *direction* d'un segment la direction qui va de l'origine à l'extrémité du segment.

Lorsqu'une direction D (*fig.* 2) est rapportée à un trièdre ($O.xyz$), pour la définir analytiquement, on mène par l'origine la demi-droite OD' parallèle à la direction D et l'on prend un point quelconque A sur cette demi-droite; la direction D est alors la même que celle du segment OA. Si donc a, b, c sont les coordonnées du point A, par rapport au trièdre ($O.xyz$), la direction D est complètement définie par ce système de trois quantités.

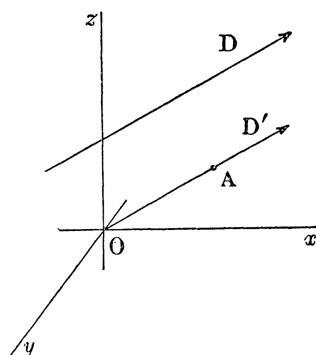


Fig. 2

Quand plusieurs segments sont parallèles à une même droite, il y a avantage à affecter leurs longueurs du signe + ou du signe — suivant qu'ils sont dirigés dans un sens convenu ou dans l'autre; la longueur d'un segment ainsi précédée du signe + ou du signe — sera appelée la *valeur algébrique du segment*; nous appellerons d'ailleurs *direction positive* des segments la direction des segments dont la longueur est affectée du signe +.

Si l'on rapporte un segment à trois axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, il est clair qu'on peut le définir analytiquement par les coordonnées x, y, z de son origine et par ses projections X, Y, Z sur les axes. Les coordonnées x, y, z définissent l'origine et les projections X, Y, Z définissent et la direction et la grandeur du segment.

6. **Vecteurs.** — On appelle *vecteur* un segment de droite, abstraction faite de sa position dans l'espace. On comprend, d'après cela, ce qu'il faut entendre par *origine, extrémité, direction* et *valeur algébrique* d'un vecteur. On termine

généralement un vecteur par une flèche qui en indique la direction.

De la définition même d'un vecteur, il suit qu'il y a lieu de considérer comme égaux deux vecteurs parallèles et dont les valeurs algébriques sont égales. Nous dirons donc que deux vecteurs sont égaux quand ils ont même direction et même valeur algébrique, et cela, quelle que soit leur position dans l'espace, de sorte que l'on peut prendre pour origine d'un vecteur n'importe quel point ; toutefois, dans beaucoup de questions, il pourra y avoir avantage à fixer cette origine, et c'est ce que nous ferons toutes les fois que nous le jugerons opportun.

7. **Vecteur résultant.** — Étant donné un système de vecteurs distribués d'une manière quelconque dans l'espace, concevons qu'on les transporte parallèlement à eux-mêmes de façon à leur donner la même origine O; soient alors OA_1, $OA_2, \ldots OA_n$ les vecteurs après qu'ils ont été ainsi transportés (*fig.* 3); on appelle *vecteur résultant* ou *somme géométrique* du système de vecteurs considérés le vecteur obtenu d'après la règle suivante :

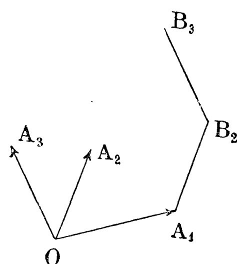


Fig. 3

On mène le vecteur A_1B_2 égal au vecteur OA_2, puis le vecteur B_2B_3 égal au vecteur OA_3, etc., enfin le vecteur $B_{n-1}B_n$ égal au vecteur OA_n; *par définition, le vecteur résultant est le vecteur* OB_n, et l'on appelle *vecteurs composants* les vecteurs OA_1, $OA_2, \ldots OA_n$. La ligne polygonale ainsi obtenue porte le nom de *polygone des vecteurs*.

8. **Composition des vecteurs.** — On appelle composition des vecteurs l'opération qui consiste à trouver, d'après la

règle précédente, le vecteur résultant d'un système de vecteurs.

9. Remarques. — 1° La règle de composition des vecteurs revient à *composer* le premier avec le deuxième, le vecteur obtenu avec le troisième, et ainsi de suite.

2° Le vecteur résultant des deux autres est la diagonale du parallélogramme construit sur les deux autres, et le vecteur résultant de trois vecteurs non situés dans le même plan est la diagonale du parallélépipède construit sur les vecteurs composants.

3° Tout vecteur dont les projections sur trois axes sont X, Y, Z peut évidemment être considéré comme le vecteur résultant des trois vecteurs X, Y, Z de même origine que le premier; pour cette raison X, Y, Z s'appellent les vecteurs composants du vecteur considéré suivant les axes.

4° On dit souvent *résultante* et *composante* au lieu de vecteur résultant et composant.

5° La somme géométrique d'un système de vecteurs coïncide avec la somme ordinaire quand tous ces vecteurs ont la même direction ; de là le nom de *somme géométrique*.

6° La règle de composition des vecteurs n'indique pas l'ordre à suivre pour effectuer cette composition; le théorème suivant montre que la résultante est toujours la même, quel que soit l'ordre de composition adopté.

10. Théorème. — *La résultante d'un système de vecteurs est indépendante de l'ordre de composition.*

La proposition est évidente pour deux vecteurs ; car la résultante est la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.

Je vais la démontrer pour trois vecteurs, OA_1, OA_2, OA_3 (*fig.* 4), et pour cela je vais montrer que l'extrémité du vecteur résultant est la même, quels que soient les deux vecteurs par lesquels on commence la composition. Si l'on com-

mence la composition par les deux vecteurs OA_1 et OA_2, l'extrémité du vecteur résultant est le point M, extrémité du vecteur égal à OA_3 et dont l'origine est le point I, quatrième sommet du parallélogramme construit sur OA_1 et sur OA_2. Or, soit H le quatrième sommet du parallélogramme construit sur OA_2 et sur OA_3 ; les deux vecteurs A_2H et IM étant

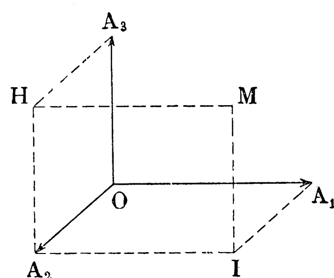


Fig. 4

égaux à OA_3 sont égaux entre eux, par suite la figure IA_2HM est un parallélogramme; il en résulte que le vecteur HM est égal au vecteur A_2I et par suite au vecteur OA_1 ; donc, si l'on commence la composition par les vecteurs OA_2 et OA_3, on trouve encore la même extrémité pour le vecteur résultant, ce qui démontre la proposition pour trois vecteurs.

Pour prouver que la proposition est générale, il suffit à présent de l'admettre pour $n - 1$ vecteurs et de la démontrer pour n. Soit donc V_1, $V_2, \ldots V_{n-2}$, V_{n-1}, V_n un système de n vecteurs ; il suffit évidemment de prouver que la résultante est la même, quel que soit celui des vecteurs par lequel on termine la composition.

Supposons donc que l'on termine d'abord par V_n, puis par V_{n-1} ; dans le premier cas on cherche d'abord la résultante du système V_1, $V_2, \ldots V_{n-1}$, et, comme l'ordre de composition est arbitraire, par hypothèse, on peut construire d'abord la résultante R des $n-2$ vecteurs V_1, $V_2, \ldots V_{n-2}$, puis la résultante R_1 de R et de V_{n-1}, et enfin celle de R_1 et de V_n. En raisonnant de même dans le second cas on sera évidemment conduit à composer R avec V_n, puis la résultante obtenue avec V_{n-1} ; dans

les deux cas on voit que la résultante est la même que celle du système des trois vecteurs R, V_{n-1}, V_n, ce qui démontre la proposition.

11. Corollaire. — *Dans la composition des vecteurs on peut remplacer deux ou plusieurs vecteurs par leur résultante.*

On peut en effet commencer l'opération par les vecteurs que l'on veut remplacer.

12. Théorème. — *La projection sur un axe du vecteur résultant d'un système de vecteurs est égale à la somme algébrique des projections des vecteurs composants.*

Cette proposition étant démontrée dans tous les cours de géométrie analytique, nous nous bornons à l'énoncer.

13. Théorème. — *La projection sur un plan du vecteur résultant d'un système de vecteurs est égale à la résultante des projections des vecteurs.*

La démonstration de ce théorème est évidente : il n'y a qu'à projeter le polygone de composition sur le plan.

14. Problème I. — *Plusieurs vecteurs étant donnés par leurs composantes suivant trois axes, trouver les composantes du vecteur résultant suivant les mêmes axes.*

Soient X_i, Y_i, Z_i les composantes de l'un quelconque des vecteurs donnés ; X, Y, Z celles du vecteur résultant. L'application du théorème numéro 12 donne immédiatement

$$X = \Sigma X_i, \qquad Y = \Sigma Y_i, \qquad Z = \Sigma Z_i.$$

15. Corollaire. — *Pour que le vecteur résultant soit nul, il faut, et il suffit, que la somme algébrique des projections des vecteurs composants sur trois axes de coordonnées soit nulle.*

En d'autres termes, il faut et il suffit que l'on ait

$$\Sigma X_i = 0, \qquad \Sigma Y_i = 0, \qquad \Sigma Z_i = 0.$$

16. **Problème II.** — *Connaissant deux vecteurs et l'angle qu'ils forment, calculer leur résultante.*

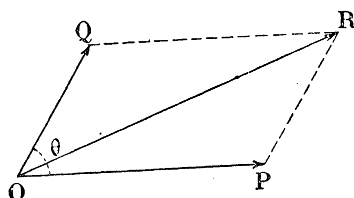


Fig. 5

Soient P et Q (*fig.* 5) les deux vecteurs, R leur résultante et θ leur angle ; on a, dans le triangle OPR,

$$\overline{OR}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PR}^2 + 2\overline{OP}.\overline{PR}\cos\theta\,;$$

d'où

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta.$$

En particulier si θ est nul ou égal à π, on a $R = P \pm Q$.

17. Remarque. — Le même triangle donne

$$\frac{OP}{\sin PRO} = \frac{PR}{\sin POR} = \frac{OR}{\sin OPR},$$

c'est-à-dire

$$\frac{P}{\sin(R.Q)} = \frac{Q}{\sin(P.R)} = \frac{R}{\sin(P.Q)}.$$

18. **Produit géométrique de deux vecteurs.** — On appelle *produit géométrique* de deux vecteurs [1] le produit de leurs valeurs algébriques par le cosinus de l'un quelconque des angles formés par leurs directions positives ; nous désignerons le produit géométrique de deux vecteurs *a* et *b* par le symbole $\varpi(a.b)$; c'est-à-dire que nous poserons symboliquement

$$\varpi(a.b) = a.b.\cos(\widehat{a.b}),$$

en désignant par le symbole $(\widehat{a.b})$ l'un quelconque des angles formés par les directions positives des deux vecteurs.

---

(1) Résal (*Traité de cinématique pure,* 1862, page 64).

19. REMARQUE. — En vertu de la définition, le produit géométrique de deux vecteurs est nul :

1° Quand l'un quelconque des vecteurs est nul ;

2° Quand les deux vecteurs sont rectangulaires.

20. **Théorème.** — *Lorsque deux vecteurs* a *et* b *sont égaux chacun à la somme géométrique de plusieurs autres, le produit géométrique de ces deux vecteurs est égal à la somme algébrique des produits géométriques des vecteurs qui composent le premier par les vecteurs qui composent le second.*

Soient $u_1, u_2, \ldots u_n$ les vecteurs composants de a, et $v_1, v_2, \ldots v_k$ les vecteurs composants de b; il s'agit de prouver que l'on a

$$\varpi(a.b) = \Sigma\varpi(u_i.v_j),$$

le signe Σ s'étendant à tous les produits que l'on obtient en donnant à i toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à n, et à j toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à k.

Pour cela, projetons orthogonalement les vecteurs v_1, $v_2, \ldots v_k$ et leur résultante b sur le vecteur a; en appliquant le théorème des projections, on a

$$b\cos(\widehat{a.b}) = v_1\cos(\widehat{a.v_1}) + v_2\cos(\widehat{a.v_2}) + \cdots + v_n\cos(\widehat{a.v_k}),$$

et, en multipliant de part et d'autre par a,

$$\varpi(a.b) = \varpi(a.v_1) + \varpi(a.v_2) + \cdots + \varpi(a.v_k).$$

Mais en vertu de cette égalité, on a aussi

$$\varpi(a.v_1) = \varpi(u_1.v_1) + \varpi(u_2.v_1) + \cdots + \varpi(u_n.v_1),$$
$$\varpi(a.v_2) = \varpi(u_1.v_2) + \varpi(u_2.v_2) + \cdots + \varpi(u_n.v_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varpi(a.v_k) = \varpi(u_1.v_k) + \varpi(u_2.v_k) + \cdots + \varpi(u_n.v_k);$$

il en résulte évidemment

$$\varpi(a.b) = \Sigma\varpi(u_i.v_j),$$

ce qui démontre la proposition.

21. **Corollaire.** — *Lorsqu'un vecteur est la somme géométrique de plusieurs autres, le carré de ce vecteur est égal à la somme des carrés des vecteurs composants augmentée de deux fois la somme des produits des vecteurs composants deux à deux par le cosinus de l'angle qu'ils forment.*

En d'autres termes, supposons que le vecteur v soit la somme géométrique des vecteurs v_1, $v_2, \ldots v_n$; la proposition énoncée signifie que l'on a

$$v^2 = \Sigma\, v_i^2 + 2\Sigma v_i v_j \cos (v_i . v_j).$$

Pour obtenir ce résultat, il suffit de former le produit géométrique du vecteur v par lui-même.

22. **Décomposition des vecteurs.** — On appelle décomposition d'un vecteur v en plusieurs autres l'opération qui consiste à trouver un système de vecteurs admettant v comme vecteur résultant. Je vais donner quelques exemples de décomposition des vecteurs.

23. Exemple I. — *Connaissant les directions de deux vecteurs et leur résultante, construire ces deux vecteurs.*

En se reportant à la *fig.* 5, on voit que le problème revient à construire un parallélogramme connaissant la diagonale et les directions des côtés ; ou bien encore à construire le triangle OPR connaissant un côté et deux angles.

24. Remarque. — A tout problème de construction du triangle OPR, connaissant le côté OR, correspond un problème de décomposition du vecteur OR en deux autres.

25. Exemple II. — *Décomposer un vecteur en trois autres de même origine connaissant leurs directions non situées dans le même plan.*

Soient OR le vecteur donné, Ox, Oy, Oz les directions des vecteurs composants cherchés (*fig.* 6). Le problème revient évidemment à la construction d'un parallélépipède, connaissant la diagonale OR et les directions des arêtes ; en contruisant le contour OPQR on a en OP, PQ, QR les longueurs des vecteurs composants.

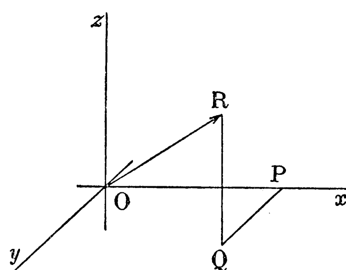


Fig. 6

26. Remarque. — En général, la décomposition d'un vecteur en plusieurs autres, dont on donne les directions, est une opération indéterminée. Cherchons, par exemple, à décomposer un vecteur OR (*fig.* 7) en quatre autres ayant des directions données Ox, Oy, Oz, Ot. Soit Rt_1 la parallèle à Ot menée par R ; sur Ox je prends un point quelconque A et je mène par ce point la parallèle Ay_1 à Oy ; pour achever le polygone des vecteurs il faudra mener une parallèle à Oz s'appuyant sur Ay_1 et sur Rt_1 et l'on aura ainsi une première solution du problème, ou même une infinité, si les droites Ay_1 et Rt_1 sont dans le même plan parallèle à Oz ; en tous cas, en faisant déplacer le point A sur Ox, on obtient autant de solutions que l'on veut.

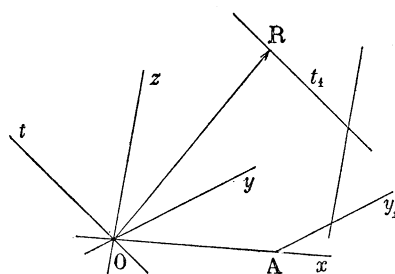


Fig. 7

LIVRE PREMIER

CINÉMATIQUE
DU POINT MATÉRIEL

CHAPITRE PREMIER

VITESSE ET ACCÉLÉRATION CONSIDÉRÉES COMME GRANDEURS NUMÉRIQUES

27. **Du temps**. — La cinématique, dont l'objet a déjà été défini, est une science abstraite analogue à la géométrie et où, indépendamment des notions habituelles de la géométrie, on fait usage d'une notion nouvelle qui est celle de la *durée* ou du *temps*.

On a la notion d'une durée et l'on conçoit l'égalité de deux durées, d'où il suit que le temps est une grandeur mesurable. On prend habituellement pour unité de mesure la seconde de temps moyen, parce qu'elle est liée au mouvement des astres.

Dès que l'on sait mesurer une durée, on peut fixer un instant quelconque I par rapport à un autre instant O pris pour origine, au moyen du nombre d'unités de temps écoulées de l'un à l'autre, et en convenant d'affecter ce nombre du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que l'instant I consi-

déré est postérieur ou antérieur à l'instant origine. Il nous paraît commode d'appeler *abscisse* de l'instant I ce nombre ainsi affecté d'un signe ; de sorte que si l'on appelle t et t' les abscisses de deux instants I et I', l'abscisse de l'instant I' par rapport à I sera $t' - t$ en grandeur et en signe.

28. **Trajectoire.** — On appelle *trajectoire* d'un point mobile le lieu géométrique des positions successives occupées par ce point dans l'espace. Ce lieu peut être une ligne droite ou une ligne courbe ; dans le premier cas le mouvement est dit *rectiligne* ; il est dit *curviligne* dans le second.

29. **Équation du mouvement.** — Soit T (*fig.* 8) la trajectoire d'un mobile ; le mouvement du mobile est complètement défini si l'on connaît à chaque instant la position qu'il occupe sur sa trajectoire. Or, prenons sur T un point fixe O et fixons un sens positif de parcours, par exemple le sens de la flèche ; appelons S l'arc variable, positif ou négatif, parcouru par le mobile et compté à partir du point O ; il est clair que l'on connaîtra à chaque instant la position du point sur sa trajectoire si l'on connaît la relation qui lie S au temps. Cette relation, que nous supposerons mise sous la forme

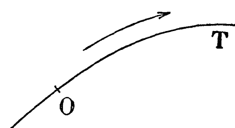


Fig. 8

$$S = f(t),$$

s'appelle l'*équation du mouvement du point sur sa trajectoire* ou la *formule des espaces*.

30. **Mouvement uniforme et mouvement varié.** — Faisant pour un instant abstraction de la trajectoire, on conçoit qu'un mouvement soit plus ou moins simple, suivant que l'équation du mouvement est elle-même plus ou moins

simple ; d'après cela, le mouvement le plus simple est celui dans lequel les espaces parcourus pendant des temps égaux sont égaux : on l'appelle un *mouvement uniforme*.

Tout mouvement qui n'est pas uniforme est dit *varié*.

31. **Vitesse dans le mouvement uniforme.** — On appelle *vitesse* dans un mouvement uniforme l'espace parcouru pendant l'unité de temps et mesuré à l'aide d'une unité arbitraire, le mètre par exemple. En vertu de ce qui précède (29), le nombre qui mesure la vitesse peut être positif ou négatif suivant que le mobile se déplace sur sa trajectoire dans le sens adopté comme sens positif, ou en sens contraire. Considérons, par exemple, un mouvement rectiligne et uniforme suivant la droite $x'x$ (*fig.* 9) et dans le sens de x' vers x; soit A la position du mobile à l'instant t et A' sa position à l'instant $t+1$; si l'on a choisi la direction qui va de x' vers x comme direction positive de parcours, la vitesse est AA'; dans le cas contraire, la vitesse est $-AA'$.



Fig. 9

32. **Formule des espaces dans le mouvement uniforme.** — Un mouvement uniforme est défini dès qu'on en connaît la vitesse. Soit en effet

$$S = f(t)$$

l'équation du mouvement et soit S_0 la valeur de S pour $t=0$; la différence $S - S_0$ représente alors en grandeur et en signe l'espace parcouru par le mobile pendant le temps t. D'autre part, si l'on appelle v le nombre positif ou négatif qui mesure la vitesse, l'espace parcouru pendant le temps t est aussi vt en grandeur et signe ; on a donc

$$S - S_0 = vt$$

ou bien

$$S = S_0 + vt.$$

Cette formule s'appelle la *formule des espaces* dans le mouvement uniforme.

33. **Conséquence.** — De la formule des espaces on déduit

$$v = \frac{S - S_0}{t};$$

d'où il suit que *la vitesse dans le mouvement uniforme est égale au quotient de l'espace parcouru par le temps employé à le parcourir.*

34. **Vitesse moyenne dans le mouvement varié.** — Lorsque le mouvement d'un mobile n'est pas uniforme, il est naturel, pour s'en faire une idée, de le comparer à celui d'un autre mobile animé d'un mouvement uniforme et qui parcourrait le même chemin pendant le même temps.

Soit donc S l'espace parcouru par un mobile sur sa trajectoire pendant le temps t ; si un second mobile parcourait cet espace d'un mouvement uniforme pendant le même temps, sa vitesse, d'après ce qui précède, serait $\frac{S}{t}$; le quotient $\frac{S}{t}$ s'appelle la *vitesse moyenne du mobile pendant l'intervalle de temps* t.

Ainsi, *on appelle vitesse moyenne d'un mouvement varié pendant l'intervalle de temps* t, *le quotient de l'espace parcouru pendant cet intervalle de temps par le temps employé à le parcourir.*

35. **Vitesse à un instant donné.** — Supposons que l'on considère le mouvement pendant un intervalle de temps très court de t à $t + \Delta t$, et soit ΔS l'arc très petit parcouru ; l'expression de la vitesse moyenne pendant l'intervalle de

temps considéré est $\frac{\Delta S}{\Delta t}$. On appelle *vitesse vraie* du mobile à l'instant t, la limite de la vitesse moyenne $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, lorsque Δt tend vers zéro.

Par définition, la vitesse vraie à l'instant t est donc égale à la dérivée de l'espace par rapport au temps; de sorte que si

$$S = f(t)$$

est la formule des espaces, la formule des vitesses sera

$$v = \frac{dS}{dt} = f'(t).$$

36. **Vitesse angulaire.** — Supposons, par exemple, que la trajectoire soit un cercle O (*fig.* 10) et adoptons comme sens positif le sens direct. Soient M et M′ les positions du mobile aux instants t et $t + \Delta t$ et soient

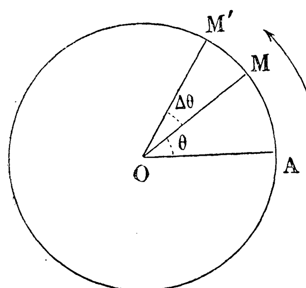


Fig. 10

$$\widehat{OA.OM} = \theta,$$
$$\widehat{OM.OM'} = \Delta\theta.$$

La vitesse moyenne pendant l'intervalle de temps Δt est

$$\frac{\text{arc MM}'}{\Delta t};$$

or, si l'on appelle r le rayon du cercle, on a

$$\text{arc MM}' = r\Delta\theta,$$

et par suite l'expression de la vitesse moyenne devient

$$r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

La vitesse à l'instant t est donc

$$r\frac{d\theta}{dt};$$

$\frac{d\theta}{dt}$ s'appelle la *vitesse angulaire* du point M à l'instant t, ou encore la *vitesse angulaire* du rayon OM mobile autour du point O. En général, si θ est l'angle, variable avec le temps, que fait un rayon mobile avec un rayon fixe, $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ est la *vitesse angulaire moyenne* du rayon pendant l'intervalle de temps Δt, et $\frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire à l'instant t ; c'est aussi la vitesse du point situé sur le rayon OM à l'unité de distance du point O.

37. **Vitesse aréolaire.** — Quand la trajectoire d'un mobile est une courbe plane AB (*fig.* 11), si l'on appelle C un point fixe pris dans le plan de la courbe, on est souvent conduit en mécanique à considérer les aires décrites par un rayon allant du point C au point mobile et comptées positivement dans un sens convenu. Si A et $A + \Delta A$ sont les aires décrites pendant les temps t et $t + \Delta t$, l'expression $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ s'appelle vitesse aréolaire moyenne pendant le temps Δt, et la limite de cette vitesse lorsque Δt tend vers zéro, c'est-à-dire $\frac{dA}{dt}$, s'appelle *vitesse aréolaire* à l'instant t. Le point C s'appelle *centre des aires*.

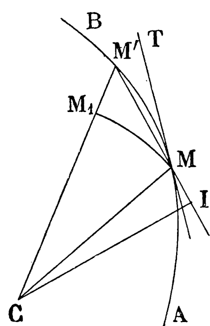


Fig. 11

38. La vitesse aréolaire d'un mobile à un instant donné est liée à sa vitesse vraie par une relation simple. Soient, en effet, M et M' deux positions infiniment voisines du mobile sur sa trajectoire, correspondant aux temps t et $t + \Delta t$; la

vitesse aréolaire moyenne est la limite du rapport

$$\frac{\text{secteur curviligne MCM}'}{\Delta t}$$

lorsque Δt tend vers zéro. Or, l'aire du secteur curviligne MCM′ est un infiniment petit équivalent à l'aire du triangle MCM′ ; si donc on désigne par v_a la vitesse aréolaire et par CI la perpendiculaire abaissée du point C sur la corde MM′, on a

$$v_a = \lim \frac{\text{CI}}{2} \cdot \frac{\text{corde MM}'}{\Delta t},$$

ou bien $$v_a = \lim \frac{\text{CI}}{2} \cdot \frac{\text{corde MM}'}{\text{arc MM}'} \cdot \frac{\text{arc MM}'}{\Delta t}.$$

Mais, lorsque Δt tend vers zéro, le premier facteur $\frac{\text{CI}}{2}$ a pour limite la moitié de la perpendiculaire menée du point C sur la tangente en M à la trajectoire ; le second facteur $\frac{\text{corde MM}'}{\text{arc MM}'}$ a pour limite l'unité, et enfin le troisième facteur $\frac{\text{arc MM}'}{\Delta t}$ a pour limite la vitesse vraie, v, du mobile quand il passe au point M ; donc :

La vitesse aréolaire à un instant donné est égale à la vitesse vraie au même instant multipliée par la moitié de la distance du centre des aires à la tangente menée à ce même instant à la trajectoire.

39. Voici une autre expression utile de la vitesse aréolaire :

Soit $d\theta$ l'angle infiniment petit de CM avec CM′ et soit $\text{CM} = r$; l'aire du secteur CMM′ est un infiniment petit équivalent à l'aire du secteur circulaire CMM_1 de centre C et de rayon r ; or, l'expression de l'aire de ce secteur est $\frac{r^2}{2}\, d\theta$; on a donc

$$v_a = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt}.$$

40. **Mouvement uniformément varié ; accélération.** — Un mouvement est dit *uniformément varié* lorsque la vitesse varie de quantités égales en des temps égaux. On appelle *accélération* dans un mouvement uniformément varié la quantité constante, positive ou négative, dont s'accroît la vitesse quand on passe du temps t au temps $t+1$.

41. **Formule de la vitesse dans le mouvement uniformément varié.** — Si l'on appelle γ l'accélération, v_0 la vitesse au temps zéro ou *vitesse initiale* et v la vitesse au temps t, en reprenant un raisonnement déjà fait pour trouver la formule des espaces dans le mouvement uniforme, on a

$$v = v_0 + \gamma t.$$

De cette formule, appelée *formule des vitesses*, on déduit

$$\gamma = \frac{v - v_0}{t};$$

d'où il suit que *dans le mouvement uniformément varié l'accélération est égale au quotient de la variation de la vitesse par la variation correspondante du temps.*

42. **Accélération dans un mouvement quelconque.** — La comparaison d'un mouvement varié à un mouvement uniforme nous a conduit à la notion de la vitesse dans un mouvement quelconque ; pareillement, la comparaison d'un mouvement quelconque à un mouvement uniformément varié va nous conduire à une notion nouvelle : celle de *l'accélération dans un mouvement quelconque.*

Appelons pour cela v et $v + \Delta v$ les vitesses d'un mobile aux temps t et $t + \Delta t$; il est naturel de comparer son mouvement à celui d'un autre mobile qui parcourrait la trajectoire d'un mouvement uniformément varié de manière à coïncider avec le premier aux deux instants considérés et à être animé des vitesses respectives v et $v + \Delta v$ aux mêmes instants ; l'accélération de ce mobile serait $\frac{v}{\Delta t}$.

Ce quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ s'appelle l'*accélération tangentielle moyenne du premier mobile pendant l'intervalle de temps* Δt. Nous en verrons la raison plus loin.

Ainsi, on appelle *accélération tangentielle moyenne*, dans un mouvement varié quelconque et pendant un intervalle de temps donné, le quotient de la variation de la vitesse par la variation du temps.

On appelle *accélération tangentielle* à l'instant t la limite de l'accélération tangentielle moyenne, lorsque Δt tend vers zéro ; en appelant γ cette limite et v la vitesse, on a

$$\gamma = \frac{dv}{dt},$$

ce qui signifie que l'*accélération tangentielle à un instant donné est la dérivée de la vitesse par rapport au temps.*

Comme, d'autre part,

$$v = \frac{dS}{dt},$$

on en conclut

$$\gamma = \frac{d^2S}{dt^2};$$

donc, *l'accélération tangentielle moyenne à un instant donné est la dérivée seconde de l'espace par rapport au temps.*

43. Remarque. — En résumé, on voit que si l'on connaît la formule des espaces

$$S = f(t),$$

en appelant v la vitesse et γ l'accélération à un instant quelconque, on a les formules

$$v = f'(t),$$
$$\gamma = f''(t),$$

qui résolvent le problème suivant :

Connaissant la loi des espaces, en déduire la loi des vitesses et la loi des accélérations.

Le problème inverse comprend deux parties :

1° *Passer de la loi des vitesses à celle des espaces ;*

2° *Passer de la loi des accélérations à celle des vitesses et à celle des espaces.*

La première partie se ramène à l'évaluation d'une intégrale définie ; car si l'on appelle v la vitesse et si l'on a

$$v = f(t),$$

en appelant S l'espace parcouru on aura

$$\frac{dS}{dt} = f(t),$$

et par suite

$$(1) \qquad S = S_0 + \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt,$$

S_0 désignant une constante arbitraire introduite par l'intégration.

On a de même à évaluer une intégrale définie pour passer de la loi des accélérations à celle des vitesses. Appelons, en effet, v et γ la vitesse et l'accélération, et soit

$$\gamma = \varphi(t);$$

il en résulte

$$\frac{dv}{dt} = \varphi(t),$$

et par suite

$$(2) \qquad v = v_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(t)\,dt,$$

v_0 désignant encore une constante arbitraire introduite par l'intégration.

Il est clair, d'après cela, qu'il ne suffit pas de connaître à chaque instant la vitesse pour définir complètement le mouvement d'un point ; car, la formule (1) fait bien connaître la longueur de l'arc de trajectoire parcouru à partir d'un instant initial t_0, mais ne donne pas la position exacte du mobile sur sa trajectoire. Pour achever de définir le mouvement, il suffit d'ailleurs de se donner la valeur S_0 de S au temps $t = t_0$, c'est-à-dire la position du mobile sur sa

trajectoire à un instant donné, à partir duquel on commence à observer son mouvement.

Pareillement, la loi des accélérations étant supposée connue, cela ne suffit pas pour définir la loi des vitesses, puisque la formule (2) renferme une constante arbitraire v_0 ; il faut encore se donner la vitesse initiale v_0 du mobile à l'instant $t = t_0$ à partir duquel on commence à observer son mouvement. La constante v_0 une fois déterminée, on en déduit la loi des espaces comme cela a été indiqué plus haut.

44. **Problème**. — *Trouver la formule des espaces dans le mouvement uniformément varié.*

Soient v_0 la vitesse initiale et γ l'accélération d'un mouvement uniformément varié ; nous avons vu que la formule des vitesses est

(3) $$v = v_0 + \gamma t,$$

et, en vertu de la remarque précédente, l'espace parcouru S sera déterminé par l'équation

$$S = S_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + \gamma t) dt.$$

Supposons $t_0 = 0$; on aura pour la formule des espaces

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

Cette formule est de la forme

$$S = a + bt + ct^2$$

et, réciproquement, *tout mouvement dans lequel l'espace est lié au temps par une relation de cette forme est un mouvement uniformément varié ;* car, si on calcule la vitesse v, on obtient

$$v = b + ct,$$

formule qui devient identique à la formule (3) quand on y fait

$$b = v_0, \qquad 2c = \gamma.$$

45. **Représentation géométrique d'un mouvement; courbes des espaces, des vitesses et des accélérations.** — Les problèmes dont nous nous sommes occupés dans les numéros précédents peuvent être résolus par une voie différente que nous allons indiquer.

Reprenons d'abord la formule des espaces

$$S = f(t);$$

traçons dans un plan deux axes rectangulaires Ot, OS (*fig.* 12) et, après avoir choisi deux longueurs arbitraires pour représenter l'unité de temps et l'unité de longueur, portons sur Ot des longueurs proportionnelles aux temps, et sur OS des longueurs proportionnelles aux espaces parcourus, en choisissant, pour fixer les idées, Ot comme direction positive sur l'axe des temps et OS comme direction positive sur l'axe des espaces ; en d'autres termes, considérons, dans la formule des espaces, t comme l'abscisse et S comme l'ordonnée d'un point du plan rapporté aux deux axes rectangulaires, Ot et OS ; alors l'équation

Fig. 12

$$S = f(t)$$

représente une courbe qui, une fois tracée, peut servir à

déterminer toutes les circonstances du mouvement. Cette courbe porte le nom de *courbe des espaces* parce que son ordonnée mesurée à l'échelle des longueurs fait connaître à chaque instant l'espace parcouru par le mobile sur sa trajectoire. Par exemple, si le mouvement est uniforme, la courbe des espaces est une ligne droite ; c'est une parabole, dans le cas d'un mouvement uniformément varié, etc.

On voit, d'après cela, ce qu'il faut entendre par *courbe des vitesses* ou *des accélérations*, et comment on pourrait construire ces courbes.

46. Proposons-nous de déterminer, au moyen de la courbe des espaces, la grandeur de la vitesse à un instant donné t. Soient A et A′ deux points de cette courbe correspondant aux abscisses t et $t + \Delta t$; menons les ordonnées AB, A′B′ de ces deux points, la corde AA′ et la parallèle AB à l'axe des temps; supposons enfin, pour fixer les idées, que les ordonnées des points A et A′ soient positives ainsi que la valeur de Δt et que, de plus, $A'B' > AB$; on aura alors

$$\Delta S = A'B_1,$$
$$\Delta t = AB_1,$$

et l'expression de la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps Δt sera donnée par le rapport

$$\frac{A'B_1}{AB_1},$$

dans lequel le numérateur est mesuré à l'échelle des longueurs, et le dénominateur à l'échelle des temps, *de telle sorte que ce rapport représente en réalité, non le rapport de deux lignes, mais le rapport de deux nombres.* Portons $A\beta$ égale à l'unité de temps et soit α' le point de rencontre de AA′ avec la parallèle à OS menée par β; les deux triangles semblables AB_1A', $A\beta\alpha'$ donnent

$$\frac{A'B_1}{AB_1} = \frac{\beta\alpha'}{A\beta},$$

et comme $A\beta$ est égale à l'unité, on voit que la vitesse moyenne est représentée par la longueur $\beta\alpha'$ mesurée à l'échelle des longueurs.

Cela posé, si l'on appelle α le point de rencontre de la tangente en A à la courbe des espaces avec l'ordonnée du point β, lorsque Δt tend vers zéro, $\beta\alpha'$ a pour limite $\beta\alpha$, de sorte que cette ligne mesurée à l'échelle des longueurs représente la grandeur de la vitesse au temps t. On peut voir du reste sans aucune difficulté que, en toute hypothèse, la vitesse au temps t est la valeur algébrique du vecteur $\beta\alpha$ mesuré à l'échelle des longueurs. Si, en particulier, l'échelle des longueurs est la même que celle des temps, la vitesse est égale au coefficient angulaire de la tangente en A à la courbe des espaces.

47. Quoi qu'il en soit, si l'on suppose tracée la courbe des espaces, on peut obtenir à chaque instant la vitesse, et par suite en déduire la courbe des vitesses ; on peut même supposer les deux courbes rapportées aux mêmes axes, et alors, à tout point A de la courbe des espaces, correspond un point A_1 de la courbe des vitesses situé sur la même parallèle à OS, qui serait, dans ce cas, aussi bien l'axe des espaces que l'axe des vitesses ; l'ordonnée du point A_1 serait la valeur algébrique du vecteur $\beta\alpha$ mesuré comme cela a déjà été dit.

48. Par un procédé identique, on peut passer de la courbe des vitesses à celle des accélérations en prenant encore OS comme axe des accélérations.

49. Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier : 1° que les points de rencontre de la courbe des vitesses avec l'axe des temps sont les projections, sur cet axe, des points de la courbe des espaces en lesquels la tangente est parallèle à Ot ; 2° que les points de rencontre de la courbe des accélé-

rations, avec le même axe, sont les projections sur cet axe, soit des points de la courbe des vitesses en lesquels la tangente est parallèle à Ot, soit des points d'inflexion de la courbe des espaces.

50. Nous remarquerons enfin qu'il ne saurait y avoir, au point de vue de la forme, aucune relation entre la courbe des espaces et la trajectoire du mobile.

51. Après avoir montré comment on peut déduire la courbe des vitesses, et par suite celle des accélérations, de la courbe des espaces, nous allons montrer comment on peut résoudre les problèmes inverses : *Étant donnée la courbe des vitesses, construire la courbe des espaces ;* ou *étant donnée la courbe des accélérations, construire celle des vitesses et celle des espaces.*

Pour abréger, nous nous bornerons au premier problème. Soit donc

$$v = \varphi(t)$$

la formule des vitesses et soit (V) (*fig.* 13) la courbe qu'elle représente. Proposons-nous de chercher l'espace parcouru par le mobile depuis le temps t_0 correspondant à l'ordonnée A_0B_0 jusqu'au temps t correspondant à l'ordonnée AB ; pour cela, partageons l'intervalle $t - t_0$ en intervalles infiniment petits dt et soit QQ' l'un quelconque de ces intervalles. Menons les ordonnées PQ, $P'Q'$ qui représentent les vitesses v et v' du mobile au commencement et à la fin de l'intervalle ; on peut supposer

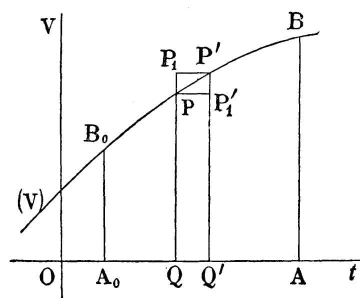


Fig. 13

dt assez petit pour que, dans l'intervalle, la vitesse varie toujours dans le même sens, de sorte que l'espace parcouru par le mobile pendant cet intervalle de temps dt sera compris entre vdt et $v'dt$. Or, si l'on construit le rectangle *inscrit* $PQP_1'Q'$ et le rectangle circonscrit $P_1QP'Q'$, on peut regarder l'expression vdt comme représentant l'aire du premier de ces rectangles, et $v'dt$ comme représentant l'aire du second ; on sait, d'ailleurs, que la différence entre les aires des deux rectangles est infiniment petite du second ordre. Il en résulte que l'espace total parcouru par le mobile peut être considéré soit comme la limite de la somme des aires des rectangles inscrits, soit comme la limite de la somme des aires des rectangles circonscrits ; sa détermination se trouve ainsi ramenée à celle de l'aire comprise entre la courbe des vitesses, l'axe des temps et les deux ordonnées A_0B_0, AB, ce qui n'est autre chose, comme l'on sait, que l'évaluation de l'intégrale définie, prise entre les limites t_0 et t, de la différentielle $\varphi(t)dt$. Observons, du reste, que l'on devra considérer comme positives les aires qui sont soit à droite de l'ordonnée initiale A_0B_0 et au-dessus de l'axe Ot, soit à gauche de A_0B_0 et au-dessous de Ot ; comme négatives les autres. Dans la *fig.* 14, on a ombré les aires qui doivent être considérées comme négatives.

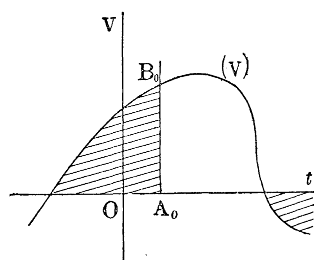


Fig. 14

CHAPITRE II

VITESSE ET ACCÉLÉRATION CONSIDÉRÉES COMME VECTEURS

52. **Représentation de la vitesse par un vecteur.** — Dans le chapitre précédent nous avons étudié le mouvement d'un point en faisant abstraction de la forme de sa trajectoire ; nous allons maintenant faire intervenir la forme de cette ligne.

53. Considérons d'abord un mouvement rectiligne et uniforme sur la droite $x'x$ (*fig.* 15) avec la vitesse v, et supposons que l'on prenne comme direction positive des abscisses, sur cette droite, la direction qui va de x' vers x. Soient A et A′ les positions du mobile aux temps t et $t+1$; en vertu des conventions faites dans le chapitre précédent, la vitesse v sera la longueur AA′ précédée du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que le mouvement s'effectue dans le sens de x' vers x (sens *direct*) ou en sens contraire (sens *rétrograde*). Il suit de là, que la vitesse du point mobile peut être représentée en grandeur et en signe par le vecteur AA′ dont la valeur algébrique est la même que celle de la vitesse, et dont la direction est la même que celle du mouvement.

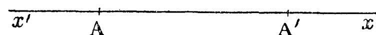


Fig. 15

54. Il y a avantage à étendre ce mode de représentation aux mouvements variés, rectilignes ou curvilignes, et voici comment on y parvient :

Soit (C) (*fig.* 16) la trajectoire sur laquelle on a fixé, bien entendu, un sens positif de parcours, et soient A et A′ les positions du mobile sur sa trajectoire aux temps t et $t + \Delta t$. Par définition, la vitesse moyenne v_m du mobile pendant l'intervalle de temps Δt est la vitesse du mobile qui parcourrait l'arc AA′ d'un mouvement uniforme pendant le temps Δt; elle a pour expression

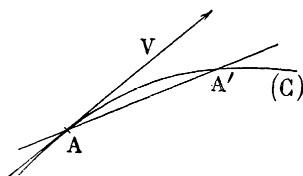


Fig. 16

$$v_m = \frac{\text{arc AA}'}{\Delta t}.$$

Or on a identiquement

$$\frac{\text{arc AA}'}{\Delta t} = \frac{\text{arc AA}'}{\text{corde AA}'} \times \frac{\text{corde AA}'}{\Delta t},$$

d'où il résulte que la limite du premier membre est la même que celle du facteur

$$\frac{\text{corde AA}'}{\Delta t};$$

on suppose du reste que le sens positif sur la droite indéfinie AA′ soit choisi de telle sorte que corde AA′ et arc AA′ soient de même signe. D'autre part, si l'on appelle v la vitesse du mobile en M, on a, par définition,

$$v = \lim v_m \quad \text{pour} \quad \Delta t = 0,$$

c'est-à-dire

$$v = \lim \frac{\text{corde AA}'}{\Delta t},$$

ce qui revient à considérer la vitesse au temps t comme la limite de la vitesse d'un mouvement rectiligne et uniforme, en vertu duquel le mobile parcourrait la corde AA′ pendant

le temps Δt; mais, d'après la convention adoptée plus haut, la vitesse de ce mouvement rectiligne est représentée par un vecteur porté sur AA′ à partir du point A dans le sens du mouvement, et, lorsque Δt tend vers zéro, la corde AA′ ayant pour limite la tangente en A à la trajectoire, la position limite de ce vecteur sera un autre vecteur égal à v en grandeur et porté sur la tangente en A dans le sens du mouvement.

Nous *conviendrons* donc, à l'avenir, de représenter la vitesse v d'un mobile au temps t, quand il passe au point A de sa trajectoire, par un vecteur ayant même valeur absolue que la vitesse, et porté sur la tangente en A à la trajectoire à partir du point A, dans le sens du mouvement, c'est-à-dire, porté dans le sens direct ou dans le sens rétrograde, suivant que la valeur algébrique de la vitesse est positive ou négative.

La vitesse étant ainsi représentée par un vecteur, on conçoit qu'on puisse la considérer comme la résultante de plusieurs autres vecteurs que nous appellerons des vitesses composantes.

55. Vitesse d'un point rapporté à des coordonnées polaires. — Supposons, par exemple, que la trajectoire soit une courbe plane (C) rapportée à des coordonnées polaires ρ et ω (*fig.* 17) et soient A et A′ deux positions infiniment voisines du mobile aux temps t et $t + dt$. Soit I le point de rencontre du rayon vecteur OA′ avec la circonférence décrite du point

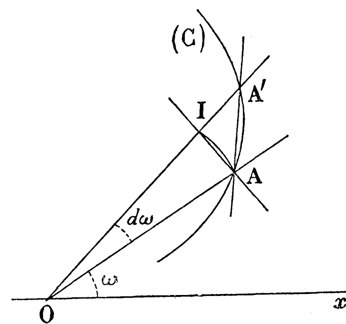


Fig. 17

O, comme centre, avec OA comme rayon; on a évidemment

$$d\rho = \text{vecteur IA}',$$

le sens positif sur chaque rayon issu du pôle résultant d'ailleurs de la définition même des coordonnées polaires. On voit alors que le vecteur AA' peut être considéré comme la résultante des deux vecteurs AI et IA', d'où il suit que la vitesse au point A est la résultante des deux vecteurs

$$\lim \frac{\text{AI}}{dt} \quad \text{et} \quad \lim \frac{\text{IA}'}{dt}.$$

Or, on a

$$\text{IA}' = d\rho,$$

et d'autre part si on néglige des infiniment petits d'ordre supérieur au premier, la corde AI se confond avec l'arc AI, de sorte que l'on peut poser

$$\text{AI} = \rho d\omega;$$

on en conclut que la vitesse est la résultante des deux vecteurs

$$\rho \frac{d\omega}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\rho}{dt}$$

portés à partir du point A, le second sur le rayon vecteur OA, le premier sur la perpendiculaire au rayon vecteur, menée par A et dans les sens respectifs des accroissements de ρ et de ω.

La valeur numérique de la vitesse a donc pour expression

$$\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \frac{d\omega^2}{dt^2}}.$$

La première composante $\rho \frac{d\omega}{dt}$ est la vitesse d'un mouvement circulaire sur un cercle de rayon OA (36); on l'appelle, pour cette raison, *vitesse de circulation*; la seconde, $\frac{d\rho}{dt}$, est la vitesse d'un mouvement rectiligne sur OA; on l'appelle vitesse *d'entraînement ou de glissement*.

56. **Méthode de Roberval pour le tracé des tangentes.** — La direction de la vitesse, en chaque point de la trajectoire, étant la même que celle de la tangente, toutes les fois que l'on sait construire le vecteur qui représente la vitesse, sans avoir recours à la trajectoire, on saura par cela même construire la tangente à cette courbe au point correspondant. Il y aura avantage, dans ce but, à considérer la vitesse comme la résultante d'autres vitesses composantes, convenablement choisies, dont il suffit au besoin d'avoir les rapports. C'est sur cette remarque qu'est basée la méthode de Roberval pour la construction des tangentes aux courbes.

Nous allons l'appliquer à quelques exemples :

57. **Exemple I.** — *Construire la tangente en un point d'une ellipse.*

Soient F et F' (*fig.* 18) les foyers d'une ellipse que nous considérerons comme la trajectoire d'un mobile, et soit M la position de ce mobile à un instant donné; appelons r et r' les rayons vecteurs de ce point, comptés positivement sur les directions respectives FM et F'M. Si l'on prend le point F comme pôle, la vitesse de glissement suivant FM est $\frac{dr}{dt}$ (55); pareillement, la vitesse de glissement suivant F'M est $\frac{dr'}{dt}$. Or, si l'on désigne par $2a$ le grand axe de l'ellipse, on a

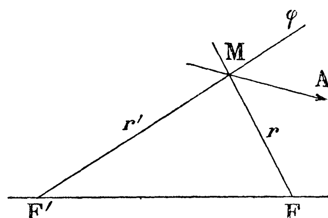


Fig. 18

(1) $$r + r' = 2a,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dr}{dt} + \frac{dr'}{dt} = 0$$

et enfin

$$(2) \qquad \frac{dr}{dt} = -\frac{dr'}{dt}.$$

Il suit de là que si MA est la vitesse en M, les projections de ce vecteur sur MF et sur MF′ sont égales ; d'ailleurs, en vertu de l'équation (2), si l'une est dirigée suivant MF, l'autre est dirigée suivant Mφ, prolongement de FM ; il en résulte que la tangente à l'ellipse en un point M est la bissectrice de l'angle FMφ.

58. Remarque. — On trouverait, d'une manière analogue, la construction classique de la tangente en un point d'une hyperbole.

59. **Exemple II.** — *Soient :* $F_1, F_2, \ldots F_n$ (*fig.* 19) *plusieurs points fixes ;* $r_1, r_2, \ldots r_n$ *les vecteurs allant de ces points à un même point* M. *On suppose que le point* M *décrive une courbe définie par l'équation*

$$(1) \qquad f(r_1, r_2, \ldots r_n) = 0$$

et l'on propose de construire la tangente en un point quelconque M *de cette courbe.*

En prenant successivement les points $F_1, F_2, \ldots F_n$ comme pôles, on voit que les vitesses de glissement suivant les vecteurs F_1M, $F_2M, \ldots$. sont respectivement

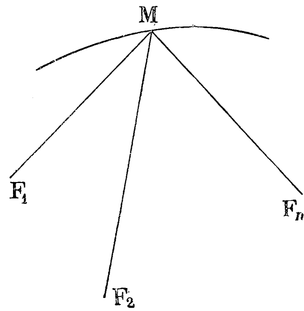


Fig. 19

$$\frac{dr_1}{dt}, \quad \frac{dr_2}{dt}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{dr_n}{dt};$$

d'autre part l'équation de la courbe donne

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial r_1}\cdot\frac{dr_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial r_n}\cdot\frac{dr_n}{dt} = 0.$$

Or si l'on appelle α_1,

$\alpha_2, \ldots \alpha_n$ les angles des vecteurs F_1M, $F_2M, \ldots$ avec le vecteur qui représente la vitesse, et v cette vitesse, on a

$$\frac{dr_1}{dt} = v \cos \alpha_1,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{dr_n}{dt} = v \cos \alpha_n;$$

portant ces valeurs dans l'équation (2), il vient

$$(3) \qquad \Sigma \frac{\partial f}{\partial r_i} \cdot \cos \alpha_i = 0.$$

Mais un terme quelconque, $\frac{\partial f}{\partial r_i} \cos \alpha_i$, de cette équation représente la projection, sur le vecteur qui représente la vitesse, d'un vecteur égal à $\frac{\partial f}{\partial r_i}$ et porté à partir de M sur la direction F_iM, ou sur la direction opposée, suivant qu'il est positif ou négatif; *donc l'équation* (3) *exprime que la somme algébrique des projections de ces vecteurs sur la tangente en* M *est égale à zéro.*

Il suit de là, que le vecteur résultant est normal en M à la courbe définie par l'équation $f(r_1 r_2 \ldots r_n) = 0$, ce qui donne le moyen de construire la normale et par suite la tangente en un point quelconque de cette courbe.

Il est à peine besoin de faire observer que la construction de la tangente à l'ellipse et la construction de la tangente à l'hyperbole s'en déduisent comme cas particuliers.

60. Remarque. — Terminons ce qui est relatif à la vitesse par une remarque sur la vitesse aréolaire.

Nous avons vu (38) que si la trajectoire d'un mobile est une courbe plane (C) (*fig.* 20), la vitesse aréolaire à un instant donné, quand on prend un point O du plan de la courbe comme centre des aires, est égale à la moitié du produit

de la vitesse vraie à cet instant par la distance du point O à la tangente à la trajectoire ; de sorte que si A est la position du mobile sur sa trajectoire à l'instant considéré, v sa vitesse à cet instant, la vitesse aréolaire au même instant est égale à $\frac{1}{2}v.OP$, OP désignant la perpendiculaire abaissée du point O sur la tangente en A. Or, le produit $v.OP$ s'appelle le moment du vecteur v par rapport au point O ; *donc la vitesse aréolaire, à un instant donné, est égale au demi-moment de la vitesse vraie par rapport au centre des aires.*

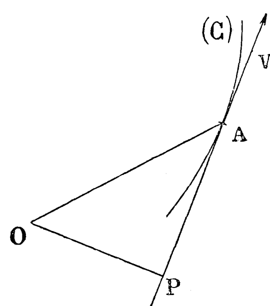


Fig. 20

61. Accélération totale. — Dans le chapitre précédent, nous avons défini (42) l'accélération comme la limite du rapport de l'accroissement de la vitesse à l'accroissement du temps, quand ce dernier accroissement tend vers zéro. L'accroissement de la vitesse, considérée comme vecteur, va nous permettre d'étendre à l'accélération le mode de représentation donné pour la vitesse.

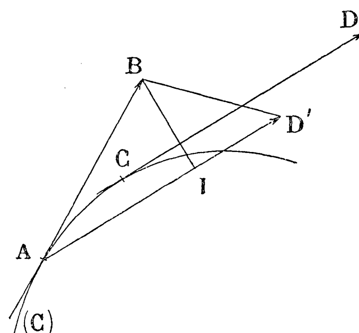


Fig. 21

Soient, pour cela, (C) (*fig.* 21) la trajectoire plane ou gauche d'un point mobile, AB et CD les vecteurs qui repré-

sentent les vitesses de ce mobile aux instants t et $t + \Delta t$. Si nous transportons le vecteur CD en AD′ parallèlement à lui-même, l'accroissement de la vitesse quand on passe du temps t au temps $t + \Delta t$, est représenté par le vecteur BD′; car AD′ est la somme géométrique de AB et de BD′. Ce vecteur BD′ s'appelle l'*accélération élémentaire moyenne pendant l'intervalle de temps* Δt.

62. On appelle *accélération totale moyenne*, pendant cet intervalle de temps Δt, le quotient $\dfrac{\text{vect BD}'}{\Delta t}\cdot$ considéré comme un vecteur dont l'origine est le point B et dont la direction est la même que celle du vecteur BD′, ou la direction opposée suivant le signe du quotient $\dfrac{\text{vect BD}'}{\Delta t}\cdot$

63. On appelle enfin *accélération totale à l'instant* t, la limite de l'accélération totale moyenne quand Δt tend vers zéro. Remarquons, d'ailleurs, que si Δt tend vers zéro, le point D′ se déplace et décrit une trajectoire passant par B; de sorte que la définition de l'accélération totale est identique à celle de la vitesse de ce point D′ quand il vient coïncider avec le point B ; dès lors, on peut la représenter par un vecteur porté, à partir du point B, sur la direction limite du vecteur $\dfrac{\text{BD}'}{\Delta t}\cdot$ Or, le vecteur $\dfrac{\text{BD}'}{\Delta t}$ est situé dans le plan BAD′, et d'autre part lorsque Δt tend vers zéro, le plan BAD′ a pour limite le plan osculateur en A à la trajectoire ; donc le vecteur, qui représente l'accélération totale du mobile à l'instant t, est situé dans le plan osculateur en A à la trajectoire. On prend d'habitude le point A comme origine de ce vecteur.

En particulier, si la trajectoire est une courbe plane, l'accélération totale est dans le plan de la courbe.

64. **Décomposition de l'accélération totale en accélération tangentielle et en accélération centripète.** — L'accélération totale étant ainsi représentée par un vecteur, on peut se pro-

poser de la définir en grandeur et en direction. On pourrait arriver à ce résultat en cherchant les composantes du vecteur qui la représente, suivant trois axes de coordonnées; mais il y a avantage à la considérer comme la résultante de ses projections sur la tangente et sur la normale principale en A à la trajectoire ; la première de ces deux projections est appelée la *composante tangentielle* de l'accélération, et la deuxième la *composante normale* ou *centripète*.

Cherchons les expressions de ces deux composantes. Pour cela, appelons ε l'angle de contingence en A (*fig.* 21), c'est-à-dire l'angle de la tangente AB avec la tangente infiniment voisine, et soit s l'arc de la trajectoire compté positivement dans un sens convenu, à partir d'une origine fixe ; désignons enfin par ρ le rayon de courbure de la trajectoire au point A ; on sait que l'on a

$$\rho = \lim \frac{ds}{\varepsilon},$$

et comme ρ désigne une quantité essentiellement positive, *on voit que* ε *et* ds *doivent toujours être de même signe.*

Cela posé, si l'on mène la perpendiculaire BI sur AD', le vecteur BD' qui est l'accélération élémentaire, peut être considéré comme la résultante des deux vecteurs BI et ID' dont les directions sont, à la limite, respectivement parallèles à la normale principale et à la tangente en A à la trajectoire ; dès lors les vecteurs

$$\frac{\text{BI}}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \frac{\text{ID}'}{\Delta t}$$

ont pour limites respectives la composante tangentielle et la composante normale cherchées. Il y a du reste lieu, d'après cela, de fixer une direction positive et une direction négative sur la normale principale et sur la tangente en A ; nous prendrons comme direction positive sur la normale principale, la direction qui va du point A vers le centre de courbure, c'est-à-dire la direction du vecteur BI lorsque Δt est positif ; quant à la direction positive sur la tangente, elle

résulte du sens adopté comme sens positif de parcours sur la trajectoire. Il est aisé à présent de trouver les expressions des deux composantes ; il suffit pour cela de projeter le contour BAD′ successivement sur la direction BI et sur la direction AD′. On obtient ainsi

$$\text{vecteur BI} = v \sin \varepsilon,$$
$$\text{vecteur ID}' = v + \Delta v - v \cos \varepsilon,$$

v et $v + \Delta v$ désignant les vitesses respectives en A et en C.

Si donc on appelle γ_t et γ_n la composante tangentielle et la composante normale, on a

$$\gamma_n = \lim \frac{v \sin \varepsilon}{\Delta t} = \lim v \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{\varepsilon}{\Delta s} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon},$$

$$\gamma_t = \lim \left(2v \frac{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\Delta t} + \frac{\Delta v}{dt} \right),$$

et finalement

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \gamma_n &= \frac{v^2}{\rho}, \\ \gamma_t &= \frac{dv}{dt}. \end{aligned} \right.$$

On voit donc que la valeur de la composante de l'accélération suivant la tangente est identique à celle de l'accélération tangentielle définie dans le chapitre précédent, ce qui justifie d'ailleurs la dénomination adoptée à ce propos.

65. Remarques. — 1° Lorque le mouvement est rectiligne, ρ est infini et l'accélération totale se réduit à l'accélération tangentielle $\frac{dv}{dt}$.

2° Lorsque la trajectoire est curviligne et est parcourue d'un mouvement uniforme, l'accélération tangentielle est nulle et l'accélération totale se réduit à l'accélération normale $\frac{v^2}{\rho}$; si en particulier le mouvement est circulaire et

uniforme, l'accélération totale est constante et dirigée vers le centre du cercle.

3° Il résulte des formules (1) que l'accélération tangentielle n'intervient dans le mouvement que pour modifier la grandeur de la vitesse, tandis que l'accélération normale ne produit que la courbure de la trajectoire.

66. **Déviation.** — On peut donner de l'accélération totale une autre définition basée sur l'introduction d'un élément très important à considérer dans l'étude du mouvement.

Soient, pour cela, A (*fig.* 22) la position d'un mobile à l'instant t, sur sa trajectoire et v sa vitesse au même instant. Concevons qu'à cet instant la vitesse du mobile devienne constante en grandeur et direction; son mouvement deviendra alors rectiligne et uniforme suivant la tangente en A, dans le sens de la vitesse et le chemin parcouru dans un temps infiniment petit Δt sera représenté par le vecteur

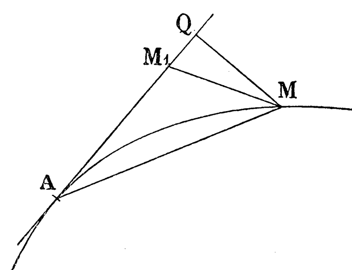


Fig. 22

$$AM_1 = v\Delta t.$$

D'autre part, soit M la position qu'il occupe véritablement sur sa trajectoire à l'instant $t + \Delta t$; de sorte que si la vitesse était demeurée constante pendant l'intervalle de temps Δt, le mobile serait allé de A en M_1, tandis que, par suite de la variation de vitesse en grandeur et direction, il est allé de A en M ; cette variation de vitesse a donc eu pour effet de le dévier de la trajectoire rectiligne, de la quantité M_1M : pour cette raison M_1M s'appelle la *déviation*.

Considérons cette déviation comme un vecteur d'origine M_1, d'extrémité M, et cherchons ses composantes suivant la tangente et suivant la normale principale en A ; si l'on mène MQ perpendiculaire sur la tangente, ces composantes sont respectivement $M_1Q = AQ - AM_1$ et QM. Évaluons d'abord M_1Q ; pour cela, appelons s l'arc de trajectoire, fonction du temps, décrit par le mobile et compté à partir du point A. En supposant que s ait été développé en série ordonnée par rapport aux puissances croissantes de t, on a

$$s = \left(\frac{ds}{dt}\right) t + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) t^2 + \cdots\cdots ;$$

par suite, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au second, on peut poser

$$\text{arc AM} = v\Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dt}\right)\Delta t^2.$$

Mais si l'on appelle ε l'angle infiniment petit de AQ avec AM, on a

$$AQ = \text{corde AM}.\cos\varepsilon ;$$

or, on sait que la différence entre l'arc AM et la corde AM est un infiniment petit du troisième ordre ; d'autre part, $\cos\varepsilon$ ne diffère de l'unité que par un infiniment petit du second ordre ; donc, en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur au second, on peut écrire

$$AQ = \text{arc AM} = v\Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dt}\right)\Delta t^2 ;$$

et, puisque $AM_1 = v\Delta t$, il en résulte

$$M_1Q = AQ - v\Delta t = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dt}\right)\Delta t^2.$$

Évaluons maintenant MQ. Pour cela, imaginons le cercle tangent en A à la trajectoire et passant par M ; si ρ_1 est le rayon de ce cercle, on a

$$\text{corde } \overline{AM}^2 = QM.2\rho_1 ;$$

mais il est clair que ρ_1 a pour limite le rayon du cercle osculateur en A, quand Δt tend vers zéro, c'est-à-dire quand M tend vers A_1 ; en remplaçant corde AM par l'expression déjà trouvée et en négligeant encore les infiniment petits d'ordre supérieur au second, on peut donc poser

$$QM = \frac{v^2}{2\rho} \Delta t^2.$$

Les deux composantes cherchées sont donc les produits par $\frac{\Delta t^2}{2}$ de la composante tangentielle et normale de l'accélération ; il en résulte que l'on peut considérer l'accélération comme la limite du vecteur $\frac{2M_1M}{\Delta t^2}$ lorsque Δt tend vers zéro.

CHAPITRE III

MOUVEMENTS PROJETÉS ET EMPLOI DES COORDONNÉES RECTILIGNES POUR L'ÉTUDE DU MOUVEMENT D'UN POINT

67. **Emploi des coordonnées rectilignes pour l'étude du mouvement d'un point.** — La position d'un point M dans l'espace est parfaitement définie par ses coordonnées x, y, z relativement à trois axes quelconques Ox, Oy, Oz (*fig.* 23). Si le point est en mouvement, x, y, z sont des fonctions du temps qui résultent de la loi du mouvement. Inversement, si l'on a les équations

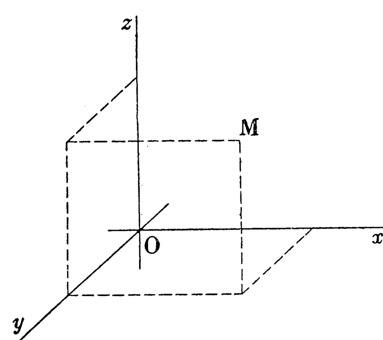


Fig. 23

$$(1) \quad \begin{cases} x = f(t), \\ y = \varphi(t), \\ z = \psi(t), \end{cases}$$

dans lesquelles $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont des fonctions connues du temps t, à chaque valeur de t correspond une position du point mobile ; on peut donc considérer les équations (1) comme définissant complètement le mouvement ; elles définissent aussi la trajectoire et permettent de fixer à chaque instant la position du point sur cette trajectoire. Pour cette raison, on les appelle les *équations du mouvement* et l'on appelle en général *équation du mouvement*

d'un point, toute équation ou tout système d'équations définissant la trajectoire et les divers éléments du mouvement : vitesse, accélération, etc. ; nous verrons que les équations (1) remplissent bien ces conditions.

68. Chacune de ces équations prises individuellement définit d'ailleurs la projection du mobile sur l'un des axes des coordonnées ; par exemple $x = f(t)$ définit la projection sur Ox, et cette projection peut être considérée à son tour comme un nouveau mobile lié au premier, de sorte que le mouvement de celui-ci résulte en quelque sorte des mouvements combinés de trois autres mobiles.

Les mouvements de ceux-ci étant rectilignes, on conçoit qu'il puisse y avoir avantage à les étudier d'abord.

69. Si, au lieu de considérer une seule des équations (1), on en prenait deux, $x = f(t)$ et $y = \varphi(t)$, par exemple, on définirait la projection du point M sur l'un des plans des coordonnées, le plan des xy dans le cas actuel ; le mouvement du point M dans l'espace peut être considéré alors comme résultant des mouvements combinés de sa projection sur le plan des xy et de sa projection sur l'axe des z. Il peut donc y avoir avantage, d'après cela, à étudier aussi le mouvement de la projection du mobile sur un plan.

Le passage du mouvement dans l'espace au mouvement projeté, ou inversement, s'opère du reste au moyen de deux propositions que nous allons établir.

70. **Théorème I.** — *Lorsqu'on projette un mobile sur un plan ou sur un axe, la vitesse du mobile projection est la projection de la vitesse du mobile dans l'espace.*

1° *Projection sur un plan.* — Soient P (*fig.* 24) le plan de projection, (C) la trajectoire et (C') sa projection. Soient A et B les positions du mobile sur sa trajectoire aux instants

t et $t + \Delta t$, A' et B' leurs projections. Si nous appelons M le mobile dans l'espace, M' le mobile projection, v la

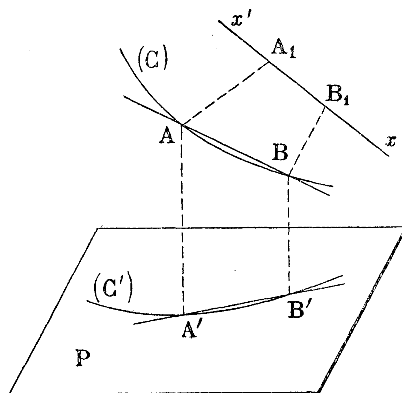


Fig. 24

vitesse du premier à l'instant t et v' la vitesse du second au même instant, v et v' désignant des vecteurs, on a, pour $\Delta t = 0$,

$$v = \text{lim. vecteur } \frac{AB}{\Delta t},$$

$$v' = \text{lim. vecteur } \frac{A'B'}{vt};$$

or,

$$\text{vecteur } \frac{A'B'}{\Delta t} = \text{proj. vect. } \frac{AB}{\Delta t};$$

par conséquent,

$$v' = \text{proj. } v.$$

2° *Projection sur un axe.* — Projetons maintenant sur un axe $x'x$ (*fig.* 24) et soient A_1 et B_1 les projections des points A et B. Appelons, comme dans le cas précédent, v la vitesse du point M à l'instant t et v_1 celle du point M_1 projection de M sur $x'x$. On a encore

$$v = \text{lim. vect } \frac{AB}{\Delta t},$$

$$v_1 = \text{lim. vect} \frac{A_1B_1}{\Delta t},$$

$$\text{vect} \frac{A_1B_1}{\Delta t} = \text{proj vect} \frac{AB}{\Delta t};$$

on en conclut, comme plus haut,

$$v_1 = \text{proj. } v.$$

71. Remarque. — Il résulte de la seconde partie de la proposition que si les équations du mouvement d'un point ou de la trajectoire de ce point sont

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

par rapport à un trièdre quelconque $(O.xyz)$ (*fig.* 23), les composantes de la vitesse suivant les arêtes de ce trièdre et à un instant quelconque t seront

$$\frac{dx}{dt} = f'(t),$$

$$\frac{dy}{dt} = \varphi'(t),$$

$$\frac{dz}{dt} = \psi'(t);$$

car $\frac{dx}{dt}$ ou $f'(t)$ représente la vitesse de la projection du mobile sur l'axe Ox, et par suite, d'après ce qui précède, la composante de la vitesse suivant le même axe. On voit de même que $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ sont les composantes de la vitesse suivant les axes respectifs Oy et Oz.

Si donc on appelle v la vitesse, α, β, γ les angles des axes, supposés rectangulaires, et du vecteur qui la repré-

sente, on a

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \alpha,$$

$$\frac{dy}{dt} = v \cos \beta,$$

$$\frac{dz}{dt} = v \cos \gamma.$$

72. **Théorème II.** — *Lorsqu'on projette un mobile sur un plan ou sur un axe, l'accélération du mobile projection est à chaque instant la projection de l'accélération du mobile dans l'espace.*

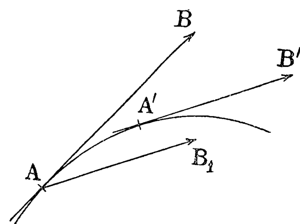


Fig. 25

Soient, en effet, A et A′ (*fig.* 25) deux positions infiniment voisines d'un mobile sur sa trajectoire; menons les vecteurs AB et A′B′ qui représentent ses vitesses respectives en A et en A′ et soit AB_1 le vecteur égal à A′B′ mené par A. Par définition, l'accélération du mobile en A est la vitesse du point B_1 quand le point A′ se rapproche indéfiniment du point A ; la proposition résulte alors du théorème I.

73. Remarque. — Il suit de là que si

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

sont les équations de la trajectoire, les projections de l'accélération sur les axes, c'est-à-dire ses composantes suivant ces axes, sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f''(t), \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi''(t), \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \psi''(t).$$

74. Application I. — Proposons-nous, comme application, d'évaluer l'accélération du mouvement d'un point rapporté à trois axes rectangulaires. Appelons, pour cela, α, β, γ les cosinus directeurs de la vitesse v en A (*fig.* 25), α_1, β_1, γ_1 ceux de la direction de la normale principale dirigée vers le centre de courbure. En vertu du théorème I, on a

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v\alpha, \\ \frac{dy}{dt} &= v\beta, \\ \frac{dz}{dt} &= v\gamma; \end{aligned} \right.$$

on en déduit

$$(2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha \frac{dv}{dt} + v \frac{d\alpha}{dt}$$

et des expressions analogues pour $\frac{d^2y}{dt^2}$ et pour $\frac{d^2z}{dt^2}$. Or, si l'on appelle s l'arc de la trajectoire compté à partir d'une origine fixe et ρ le rayon de courbure en A, on sait, d'après une formule d'analyse bien connue, que l'on a

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\alpha_1}{\rho}, \\ \frac{d\beta}{ds} &= \frac{\beta_1}{\rho}, \\ \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{\gamma_1}{\rho}; \end{aligned} \right.$$

d'autre part, on a identiquement

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt},$$

et par suite, en vertu des équations (3),

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\alpha_1}{\rho} \cdot \frac{ds}{dt};$$

d'ailleurs, $\frac{ds}{dt} = v$; par conséquent

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1 \frac{v}{\rho}.$$

On trouverait de même

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta_1 \frac{v}{\rho},$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma_1 \frac{v}{\rho},$$

et, en remplaçant dans l'équation (2) et dans les équations analogues, on obtient finalement

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \alpha \frac{dv}{dt} + \alpha_1 \frac{v^2}{\rho}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \beta \frac{dv}{dt} + \beta_1 \frac{v^2}{\rho}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \gamma \frac{dv}{dt} + \gamma_1 \frac{v^2}{\rho}. \end{aligned} \right.$$

Il en résulte évidemment que l'accélération est la résultante des deux vecteurs $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{\rho}$ portés respectivement sur les directions α, β, γ et α_1, β_1, γ_1, c'est-à-dire suivant la tangente et suivant la normale principale en A.

Nous retrouvons ainsi, par un procédé purement analytique, la composante tangentielle et la composante normale de l'accélération.

75. **Application II.** — Comme autre application, cherchons les composantes de la déviation suivant les axes. Soient, pour cela,

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

les équations de la trajectoire, A et A′ (*fig.* 26) les positions du mobile aux instants t et $t + \Delta t$; si l'on appelle x, y, z les coordonnées du point A, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$,

$z + \Delta z$ celles du point A', on a en particulier

$$x = f(t),$$

$$x + \Delta x = f(t + \Delta t);$$

ou bien encore

$$x + \Delta x = f(t) + \frac{\Delta t}{1} f'(t) + \frac{\Delta t^2}{1.2} f''(t) + \ldots,$$

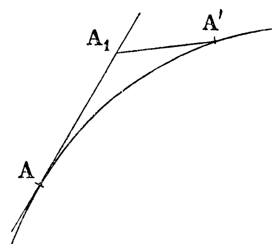


Fig. 26

en supposant, bien entendu, que la fonction $f(t)$ puisse être développée suivant la formule de Taylor.

D'autre part, soit A_1 la position qu'occuperait le mobile sur la tangente en A s'il se déplaçait sur cette tangente d'un mouvement uniforme pendant le temps Δt ; en appelant x_1, y_1, z_1 les coordonnées de ce point, on a en particulier

$$x_1 - x = \text{proj. vect } AA_1 \text{ sur } Ox;$$

or, le vecteur AA_1 est égal à la vitesse multipliée par Δt ; donc sa projection sur Ox est égale à $\frac{dx}{dt}.\Delta t$, c'est-à-dire à $f'(t)\Delta t$, et l'on a par suite

$$x_1 = x + f'(t)\Delta t.$$

Cela posé, la composante de la déviation suivant Ox, composante qui n'est autre chose que la projection du vecteur A_1A' sur Ox, a pour expression

$$(x + \Delta x) - x_1;$$

et, en se bornant aux infiniment petits du second ordre, on voit qu'elle est égale à

$$\frac{\Delta t^2}{2} f''(t);$$

mais $f''(t)$ est la composante de l'accélération suivant le

même axe ; donc la composante de la déviation suivant Ox est égale à la composante de l'accélération suivant le même axe, multipliée par $\frac{\Delta t^2}{2}\cdot$ On évaluerait de même les autres composantes. On peut conclure de là la définition, déjà donnée (66), de l'accélération au moyen de la déviation.

76. **Application III.** — Comme dernière application, supposons qu'un cercle O (*fig.* 27) soit parcouru par un mobile d'un mouvement uniforme avec une vitesse angulaire ω, de sorte que la vitesse vraie est ωR, R désignant le rayon du cercle. L'accélération du mouvement se réduit à l'accélération normale $\frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$ et est dirigée vers le point O ; d'ailleurs la vitesse aréolaire, quand on prend le point O comme centre des aires, est constante.

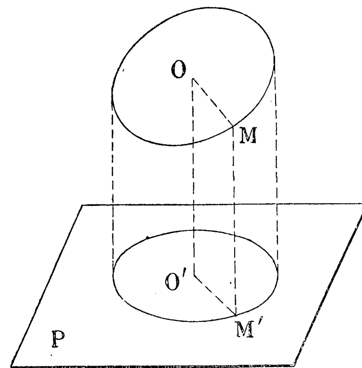


Fig. 27

Cela posé, projetons orthogonalement le mouvement sur un plan P. La projection du cercle est une ellipse dont le centre est le point O′ projection du centre du cercle et, si M′ est la projection du mobile M, les aires décrites par le rayon vecteur r allant du point O′ au point M′ sont proportionnelles aux aires du cercle dont elles sont les projections ; il en résulte qu'elles sont proportionnelles aux temps employés à les décrire, de sorte que, si l'on prend le point O′ comme centre des aires dans le plan P, la vitesse aréolaire du mouvement projeté est constante.

Enfin l'accélération du point M' est la projection de l'accélération du point M ; comme celle-ci est $\omega^2 R$, celle-là est $\omega^2 \times$ proj. R, c'est-à-dire $\omega^2 r$, et elle est de plus dirigée vers le point O', puisque l'accélération du point M est dirigée vers le point O.

Il suit de là que l'ellipse peut être considérée comme la trajectoire d'un point mobile dont le mouvement satisfait aux deux lois suivantes :

1° *Si l'on prend le centre de l'ellipse comme centre des aires, la vitesse aréolaire est constante ;*

2° *L'accélération dirigée vers le centre de l'ellipse est proportionnelle au rayon vecteur qui va de ce point au mobile.*

77. Remarque. — Soient

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

les équations de la trajectoire d'un point M (*fig.* 28) rapportée à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Pour une même valeur de t ces trois équations définissent les projections A, B, C du point M sur les axes. Considérons A,B,C comme les extrémités de trois vecteurs variables OA, OB, OC ; alors le point M est l'extrémité du vecteur résultant. Son mouvement résulte, ainsi que nous l'avons du reste déjà remarqué (67), des mouvements combinés des points A, B, C extrémités des vecteurs composants et que l'on peut appeler des mouvements composants. *Les*

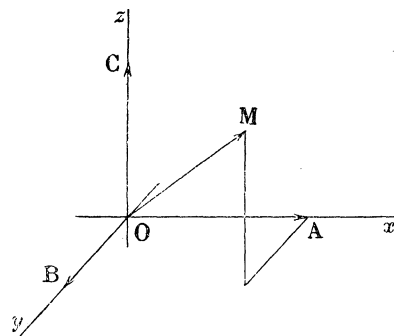


Fig. 28

théorèmes I et II prouvent que la vitesse et l'accélération du mouvement résultant sont les sommes géométriques des vitesses et des accélérations des mouvements composants.

Plus généralement, imaginons un système de vecteurs variables de même origine, OA_1, $OA_2, \ldots$ OA_n (*fig.* 29) et leur vecteur résultant OA. *Il est aisé de voir que la vitesse et l'accélération du point A sont les sommes géométriques respectives des vitesses et des accélérations des points* $A_1, A_2, \ldots A_n$. Rapportons en effet tout le système à trois axes Ox, Oy, Oz et appelons :

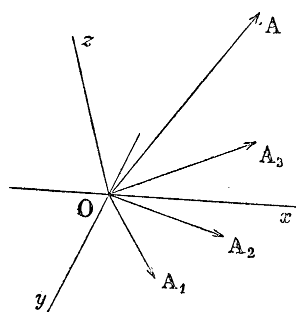


Fig. 29

x_i, y_i, z_i les coordonnées du point A_i ;

x, y, z celles du point A.

On a, d'après le théorème des projections,

$$x = \Sigma\, x_i$$

et l'on en déduit par différentiation

$$\frac{dx}{dt} = \Sigma \frac{dx_i}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma \frac{d^2x_i}{dt^2}.$$

On aurait des équations analogues au moyen de y et de z. Ces équations expriment la proposition énoncée.

Il y a lieu d'observer que les vecteurs OA_1, $OA_2, \ldots$ OA_n peuvent être variables en grandeur et en direction ; la proposition ne cesse pas d'être vraie.

CHAPITRE IV

DES MOUVEMENTS RELATIFS ET DE LA COMPOSITION DES MOUVEMENTS

78. **Systèmes invariables et mouvements relatifs.** — On dit qu'un système de points est *invariable* quand les distances mutuelles de ces points restent constantes ; un corps solide est un système invariable.

Soit S un système invariable en mouvement et soit M un point mobile dans le système. Le mouvement du point M peut être regardé, soit par un observateur fixe dans l'espace, soit par un observateur entraîné avec le système ; le mouvement regardé par le premier observateur s'appelle un *mouvement absolu*, et l'on appelle *mouvement relatif* celui qui est regardé par le second observateur ; enfin, le mouvement du système dans l'espace est appelé *mouvement d'entraînement*.

On peut concevoir, plus généralement, qu'un point M soit mobile dans un premier système S_1, mobile lui-même dans un second système S_2..., le dernier système S_n étant mobile dans l'espace ; si l'on imagine alors plusieurs observateurs entraînés respectivement avec les systèmes $S_1, S_2, \ldots S_n$, les mouvements observés par chacun d'eux sont des mou-

vements relatifs, et le mouvement absolu du point M est celui qui est observé par un observateur *fixe* dans l'espace.

79. **Remarque I.** — Tous les mouvements observés à la surface de la terre sont des mouvements relatifs, car la terre est en mouvement dans l'espace ; nous n'avons donc pas, dans la nature, d'exemples de mouvements absolus, mais nous n'en concevons pas moins leur existence.

80. **Remarque II.** — La position, dans l'espace, d'un système invariable S est parfaitement définie quand on connaît les positions occupées par trois points du système non situés en ligne droite.

Appelons en effet S_1 une position du système et A_1, B_1, C_1 les positions respectives correspondantes de trois de ses points A, B, C non situés en ligne droite. Si on déplace le système S de manière que A vienne en A_1 et B en B_1, et si on fixe alors ces points, les seuls mouvements que puisse prendre le système sont des mouvements de rotation autour de l'axe A_1B_1 ; de sorte que si on assujettit un point C du système à coïncider avec le point C_1, la position du système tout entier en résulte, pourvu bien entendu que le point C_1 ne soit pas en ligne droite avec les points A_1 et B_1. Il est clair d'ailleurs que pour amener A, B, C à coïncider respectivement avec A_1, B_1, C_1, il est nécessaire et suffisant que l'on ait $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, $A_1C_1 = AC$.

81. **Composition des mouvements.** — Le problème de la composition des mouvements peut s'énoncer ainsi :

Connaissant le mouvement d'un point M *dans un premier système* S_1, *celui du système* S_1 *dans un second système* S_2, *et ainsi de suite jusqu'à un système* S_n *dont on suppose connu le mouvement dans l'espace, trouver le mouvement absolu ; plus*

généralement, connaissant tous ces mouvements, sauf un, trouver celui-ci.

Montrons d'abord, en nous bornant au cas d'un seul mouvement relatif, comment de la connaissance de ce mouvement et du mouvement d'entraînement on peut s'élever à la connaissance du mouvement absolu. Soient pour cela $(o.xyz)$ (*fig.* 30) un trièdre trirectangle fixe dans l'espace et $(O.XYZ)$ un trièdre trirectangle fixe dans le système mais entraîné avec lui. Appelons : ξ, η, ζ les coordonnées du point O par rapport au trièdre fixe ; α, β, γ ; α_1, β_1 γ_1 ; α_2, β_2, γ_2 les cosinus directeurs des directions respectives OX, OY, OZ rapportées au trièdre $(o.xyz)$; et enfin x, y, z les coordonnées absolues d'un point M, X, Y, Z ses coordonnées relatives, c'est-à-dire ses coordonnées prises respectivement par rapport aux axes ox, oy, oz et par rapport aux axes OX, OY, OZ.

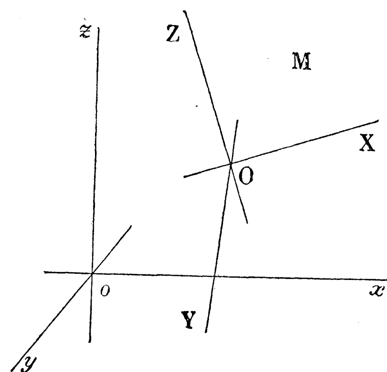


Fig 30

On a

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \xi + \alpha X + \alpha_1 Y + \alpha_2 Z, \\ y = \eta + \beta X + \beta_1 Y + \beta_2 Z, \\ z = \zeta + \gamma X + \gamma_1 Y + \gamma_2 Z. \end{cases}$$

Puisqu'on connaît le mouvement d'entraînement, on connaît le mouvement du trièdre $(O.XYZ)$ par rapport au trièdre $(o.xyz)$, ce qui signifie que ξ, η, ζ et les neuf cosinus sont des fonctions connues du temps t ; si alors on connaît le mouvement par rapport au trièdre $(O.XYZ)$ du point M

mobile dans le système, on peut supposer que X, Y, Z sont des fonctions connues du temps ; par suite, les formules (1) donnent les expressions des coordonnées absolues x, y, z en fonction de t et définissent, par conséquent, le mouvement absolu du point M.

Cela posé, proposons-nous de trouver la vitesse et l'accélération du mouvement absolu connaissant celles du mouvement relatif et du mouvement d'entraînement.

82. **Composition des vitesses. Théorème.** — *La vitesse du mouvement absolu est la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.*

Appelons en effet M un point mobile dans un système S animé d'un mouvement d'entraînement et conservons les mêmes notations que dans le numéro précédent, de sorte que le mouvement absolu sera défini par les équations (1). Dans ces équations regardons d'abord X, Y, Z comme des quantités constantes ; alors le point M sera fixe dans le système et ne participera qu'au mouvement d'entraînement ; par suite, les composantes suivant les axes fixes ox, oy, oz, de sa vitesse à l'instant t auront pour expressions respectives

$$v_x = \frac{d\xi}{dt} + X\frac{d\alpha}{dt} + Y\frac{d\alpha_1}{dt} + Z\frac{d\alpha_2}{dt},$$

$$v_y = \frac{d\eta}{dt} + X\frac{d\beta}{dt} + Y\frac{d\beta_1}{dt} + Z\frac{d\beta_2}{dt},$$

$$v_z = \frac{d\zeta}{dt} + X\frac{d\gamma}{dt} + Y\frac{d\gamma_1}{dt} + Z\frac{d\gamma_2}{dt};$$

en d'autres termes, si l'on appelle μ le point du système avec lequel le point M coïncide à l'instant t, v_x, v_y, v_z sont les composantes suivant les axes fixes de la vitesse v du point μ à l'instant t. C'est cette vitesse qui est ce qu'on appelle la *vitesse d'entraînement du point* M *à l'instant* t.

Supposons maintenant que X, Y, Z soient variables ;

alors le point M est en mouvement dans le système et les composantes par rapport aux axes OX, OY, OZ de sa vitesse v à l'instant t ont pour expressions respectives

$$\frac{dX}{dt}, \qquad \frac{dY}{dt}, \qquad \frac{dZ}{dt};$$

par suite, les composantes de cette vitesse par rapport aux axes fixes, seront données par les équations

$$V_x = \alpha \frac{dX}{dt} + \alpha_1 \frac{dY}{dt} + \alpha_2 \frac{dZ}{dt},$$

$$V_y = \beta \frac{dX}{dt} + \beta_1 \frac{dY}{dt} + \beta_2 \frac{dZ}{dt},$$

$$V_z = \gamma \frac{dX}{dt} + \gamma_1 \frac{dY}{dt} + \gamma_2 \frac{dZ}{dt}:$$

ce sont les composantes, suivant les mêmes axes, de la *vitesse relative* du point M à l'instant t.

Or, si l'on différentie les équations (1), on obtient

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + X\frac{d\alpha}{dt} + Y\frac{d\alpha_1}{dt} + Z\frac{d\alpha_2}{dt} + \alpha\frac{dX}{dt} + \alpha_1\frac{dY}{dt} + \alpha_2\frac{dZ}{dt},$$

c'est-à-dire

(2) $$\frac{dx}{dt} = v_x + V_x$$

et des expressions analogues pour $\frac{dy}{dt}$ et pour $\frac{dz}{dt}$; mais le premier membre de l'équation (2) représentant la projection sur ox de la vitesse absolue du point M à l'instant t, on voit que cette projection est la somme algébrique des projections sur le même axe de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement au même instant. *Il en résulte évidemment que le vecteur qui représente la vitesse absolue du point* M *à l'instant* t, *est la somme géométrique des vecteurs qui représentent la vitesse relative et la vitesse d'entraînement du point* M *au même instant ; ce qui démontre la proposition.*

83. **Corollaire I.** — *La vitesse relative est la somme géométrique de la vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement prise en sens contraire.*

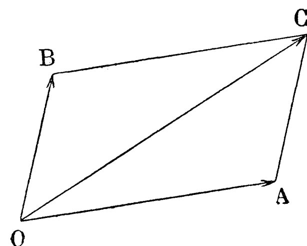


Fig. 31

Car, si OA, OB, OC (*fig.* 31) sont respectivement la vitesse d'entraînement, la vitesse relative et la vitesse absolue du point M à l'instant t, dans le parallélogramme OACB le vecteur AC, qui représente la vitesse relative, est la somme géométrique des deux vecteurs AO et OC, dont le premier représente la vitesse d'entraînement prise en sens contraire.

84. **Corollaire II.** — *La vitesse d'entraînement est la somme géométrique de la vitesse absolue et de la vitesse relative prise en sens contraire.*

Même raisonnement que pour le corollaire I.

85. Remarque I. — L'opération qui a pour but de déterminer la vitesse absolue connaissant la vitesse relative et la vitesse d'entraînement porte le nom de *composition de ces deux vitesses*. On voit par là ce qu'il faut entendre plus généralement par composition de plusieurs vitesses.

86. Remarque II. — Il résulte du théorème précédent que la règle de composition de deux vitesses est la même que celle de la composition de deux vecteurs ; dès lors elle s'étend naturellement d'elle-même à un nombre quelconque de vitesses.

D'après cela, appelons M un point mobile dans un système S_1, mobile lui-même dans un système S_2, et ainsi de

suite jusqu'à un système S_n mobile dans l'espace. A l'instant t le point M coïncide avec le point μ_1 du système S_1 ; μ_1 coïncide avec un point μ_2 du système S_2, et ainsi de suite jusqu'à un point μ_n du système S_n; soient :

v la vitesse du point M par rapport à un observateur entraîné avec S_1 ;

v_1 la vitesse du point μ_1 par rapport à un observateur entraîné avec S_2, etc.;

Et enfin v_n la vitesse du point μ_n par rapport à un observateur fixe dans l'espace.

Si l'on appelle V la vitesse du point M par rapport à ce même observateur, le vecteur V est la somme géométrique des vecteurs v, v_1, v_2,... v_n; V est la vitesse résultante ; v, v_1,... v_n les vitesses composantes, et l'on voit ainsi comment il faut comprendre la proposition suivante :

La vitesse résultante de plusieurs mouvements est la somme géométrique des vitesses de tous les mouvements.

En particulier, si le mobile participe à deux mouvements, la vitesse résultante est la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses composantes ; c'est la diagonale du parallélépipède construit sur les vitesses composantes dans le cas de trois mouvements ; elle est enfin égale à la somme algébrique des vitesses composantes quand celles-ci sont parallèles.

87. Remarque III. — La décomposition des vitesses suit les mêmes lois que la décomposition des vecteurs.

Nous renvoyons d'ailleurs le lecteur au chapitre sur les vecteurs pour tout ce qui a trait soit à la composition, soit à la décomposition des vitesses.

88. **Application**. *Tangente à la cycloïde*. — La *cycloïde* est la courbe engendrée par un point d'un cercle qui *roule sans glisser* sur une droite fixe $x'x$ (*fig*. 32). Cette définition équivaut à la suivante :

La cycloïde est la trajectoire d'un point qui se déplace sur un cercle d'un mouvement uniforme avec une vitesse v, pendant que tous les points du cercle se déplacent parallèlement à une droite fixe $x'x$, d'un mouvement uniforme et avec la même vitesse v.

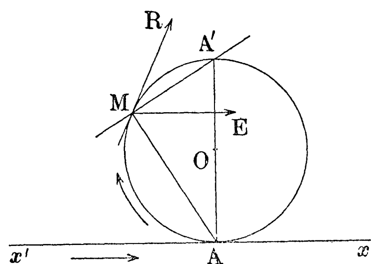


Fig. 32

D'après cela, soient, à un instant donné, O la position du cercle et M la position correspondante du mobile. Indiquons par des flèches le sens du mouvement d'entraînement et le sens du mouvement relatif, et soient à l'instant considéré ME et MR la vitesse d'entraînement et la vitesse relative. On a, par hypothèse, $ME = MR$; il en résulte que la vitesse absolue est la bissectrice de l'angle EMR. Cette bissectrice passe d'ailleurs par le point A' diamétralement opposé au point A où le cercle touche la droite $x'x$; donc :

La tangente en M *à la cycloïde s'obtient en joignant le point* M *au point* A' *diamétralement opposé au point de contact du cercle et de la droite.*

89. Remarque. — On voit par cet exemple comment, à l'aide des mouvements relatifs, on peut étendre la méthode de Roberval pour le tracé des tangentes à des cas auxquels, au premier abord, elle semble ne pas pouvoir s'appliquer simplement.

90. **Composition des accélérations.** — La loi de la composition des accélérations est la même que celle de la composition des vitesses, quand le mouvement d'entraînement est

un mouvement de *translation ;* elle est plus compliquée dans le cas général où le mouvement d'entraînement est quelconque. Ce dernier cas exige d'ailleurs des développements qui sortiraient du cadre de cet ouvrage : aussi nous bornerons-nous à examiner le cas où le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation.

91. **Définition.** — On dit qu'un système invariable est animé d'un mouvement de *translation* lorsqu'on peut l'amener d'une position à une autre en faisant décrire à tous ses points, pendant le même temps, des segments de droites égaux et parallèles.

Un mouvement de translation peut être rectiligne ou curviligne selon que les divers points du corps décrivent des droites ou des courbes; seulement, dans le second cas le mouvement peut être considéré comme une suite ininterrompue de mouvements de translation infiniment petits et dont les directions changent d'un instant à l'instant suivant.

92. Remarque. — Il suit en particulier de la définition précédente que si le mouvement d'un système invariable est un mouvement de translation, toute droite liée invariablement au système se déplace parallèlement à elle-même.

93. **Théorème.** — *Quand le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation, l'accélération absolue est la somme géométrique de l'accélération relative et de l'accélération d'entraînement.*

Soient, en effet, ($o\ xyz$) et (O.XYZ) (*fig.* 33) deux trièdres trirectangles fixes, le premier dans l'espace et le second dans le système. Comme le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation, les arêtes du trièdre (O.XYZ) conservent des directions invariables dans l'espace, et par

suite il est permis de supposer les deux trièdres parallèles et de même sens. Appelons alors : ξ, η, ζ les coordonnées du point O par rapport au premier ; X, Y, Z les coordonnées du point mobile rapporté au second ; et enfin x, y, z les coordonnées du même point rapporté au trièdre fixe $(o.xyz)$. On a

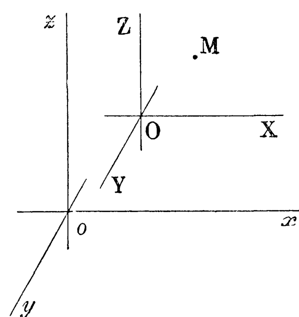


Fig. 33

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \xi + \mathrm{X}, \\ y = \eta + \mathrm{Y}, \\ z = \zeta + \mathrm{Z}, \end{cases}$$

et l'on en déduit par différentiation

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d^2\xi}{dt^2} + \dfrac{d^2\mathrm{X}}{dt^2}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + \dfrac{d^2\mathrm{Y}}{dt^2}, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} + \dfrac{d^2\mathrm{Z}}{dt^2}. \end{cases}$$

Dans ces équations, $\dfrac{d^2\xi}{dt^2}$, $\dfrac{d^2\eta}{dt^2}$, $\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}$ représentent les composantes de l'accélération du point O suivant les axes fixes Ox, Oy, Oz, c'est-à-dire les composantes, suivant ces mêmes axes, de l'*accélération d'entraînement*.

D'autre part, $\dfrac{d^2\mathrm{X}}{dt^2}$, $\dfrac{d^2\mathrm{Y}}{dt^2}$, $\dfrac{d^2\mathrm{Z}}{dt^2}$ représentent les composantes, suivant les axes mobiles OX, OY, OZ, de l'accélération du point M par rapport à un observateur entraîné avec le système ; c'est-à-dire les composantes, suivant les mêmes axes, de l'*accélération relative*. D'ailleurs les deux systèmes d'axes étant parallèles, $\dfrac{d^2\mathrm{X}}{dt^2}$, $\dfrac{d^2\mathrm{Y}}{dt^2}$, $\dfrac{d^2\mathrm{Z}}{dt^2}$ sont aussi les composantes

de l'accélération relative suivant les axes fixes ; enfin $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ sont les composantes de l'accélération absolue suivant les mêmes axes. Les équations (2) expriment alors que la projection de l'accélération absolue sur l'un quelconque des axes Ox, Oy, Oz est la somme algébrique des projections de l'accélération relative et de l'accélération d'entraînement ; de là résulte évidemment la proposition.

94. Remarque I. — La composition des accélérations dans le cas de plusieurs mouvements de translation se fait d'après les mêmes règles que la composition des vitesses ; le raisonnement est absolument le même.

95. Remarque II. — Si dans les équations (1) on regarde X, Y, Z comme des constantes, elles donnent les coordonnées absolues d'un point du système mobile, c'est-à-dire les coordonnées d'un point du système mobile rapporté aux axes fixes. On en déduit par différentiation

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

et des formules analogues au moyen de y et de z. *On conclut de là que si un système invariable est animé d'un mouvement de translation, tous les points du système ont à chaque instant la même vitesse et la même accélération que le point* O.

CHAPITRE V

ÉTUDE DE QUELQUES MOUVEMENTS ET APPLICATIONS

96. **Problème I.** — *Étudier le mouvement d'un point sur une droite* x'x (fig. 34) *sachant que l'équation du mouvement est*

(1) $$x = a \cos(\alpha t + \beta).$$

Soit O l'origine des abscisses et Ox la direction positive sur la trajectoire. Supposons, pour fixer les idées, a et α positifs et différentions deux fois successivement les deux membres de l'équation (1); nous obtenons ainsi deux nouvelles équations

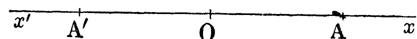


Fig. 34

(2) $$\frac{dx}{dt} = -a\alpha \sin(\alpha t + \beta),$$

(3) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\alpha^2 \cos(\alpha t + \beta),$$

qui donnent à chaque instant la vitesse et l'accélération du mobile.

Cela posé, remarquons que les trois équations ne changent pas quand on y remplace t par $t + \frac{2\pi}{\alpha}$; il en résulte que si, à un instant quelconque, le mobile traverse un point M de sa trajectoire avec la vitesse v et l'accélération γ, à

l'instant $t + \frac{2\pi}{\alpha}$ il traverse le même point, dans le même sens, avec la même vitesse et la même accélération; pour cette raison, le mouvement que nous étudions est dit *périodique*, et $\frac{2\pi}{\alpha}$ s'appelle l'*amplitude* de la période.

Il en résulte aussi que pour faire l'étude complète du mouvement, il suffit de faire varier t dans un intervalle égal à $\frac{2\pi}{\alpha}\cdot$

Il y a d'ailleurs avantage, pour simplifier cette étude, à remplacer dans les trois équations t par $t - \frac{\beta}{\alpha}$, ce qui revient à changer l'origine des temps et à compter les temps à partir de l'instant dont l'abscisse par rapport à la première origine est $-\frac{\beta}{\alpha}$; les trois équations deviennent ainsi

$$(4) \qquad x = a \cos \alpha t,$$

$$(5) \qquad \frac{dx}{dt} = -a\alpha \sin \alpha t.$$

$$(6) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -a\alpha^2 \cos \alpha t.$$

Occupons-nous d'abord de l'équation (4), qui définit la position du mobile sur sa trajectoire, et faisons varier t de 0 à $\frac{2\pi}{\alpha}\cdot$ On voit sans difficulté que dans cet intervalle x est nul pour

$$t = \frac{\pi}{2\alpha}$$

et pour

$$t = \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\alpha};$$

il est maximum et a pour valeur a quand

$$t = 0$$

et

$$t = \frac{2\pi}{\alpha};$$

enfin il est minimum et égal à $-a$ quand

$$t = \frac{\pi}{\alpha}.$$

Portons donc à partir du point O, sur la trajectoire, les longueurs OA et OA′ égales à a et faisons varier x successivement de 0 à $\frac{\pi}{2\alpha}$, de $\frac{\pi}{2\alpha}$ à $\frac{\pi}{\alpha}$, de $\frac{\pi}{\alpha}$ à $\frac{\pi}{2\alpha}+\frac{\pi}{\alpha}$ et enfin de $\frac{\pi}{2\alpha}+\frac{\pi}{\alpha}$ à $\frac{2\pi}{\alpha}$; le mobile se déplace alors successivement de A en O, de O en A′, et revient après de A′ en O et de O en A ; il oscille ensuite indéfiniment entre A et A′, A′ et A.

Si nous passons maintenant à l'équation (5), qui définit la vitesse, nous voyons que la vitesse, qui est nulle quand le mobile est en A, devient négative et décroît lorsqu'il se déplace de A en O ; elle est alors minimum, croît ensuite jusqu'à ce que le mobile soit en A′, s'annule de nouveau en changeant de signe et continue à croître quand le mobile va de A′ en O ; là elle est maximum et elle décroît ensuite jusqu'à zéro quand le mobile se déplace de O en A. Ajoutons que la valeur maximum est $a\alpha$ et la valeur minimum $-a\alpha$.

Quant à la formule (6), qui donne l'accélération, on peut l'écrire

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\alpha^2\ x;$$

sous cette forme on voit que l'accélération est proportionnelle à x et varie dans le même sens que l'abscisse du point ; on voit en outre qu'elle est constamment dirigée vers le point O.

97. Remarque. — Le mouvement que nous venons d'étudier porte le nom de *mouvement vibratoire simple ;* $\frac{2\pi}{\alpha}$ s'appelle la *durée* de la vibration et a en est l'*amplitude*.

98. **Problème II.** — *Étudier le mouvement d'un point sur un plan, sachant que les mouvements de ses projections sur deux axes rectangulaires, situés dans ce plan, sont des mouvements vibratoires simples de même durée et de même amplitude définis par les équations*

$$x = a\,cos\,(\alpha t + \beta),$$
$$y = a\,sin\,(\alpha t + \beta).$$

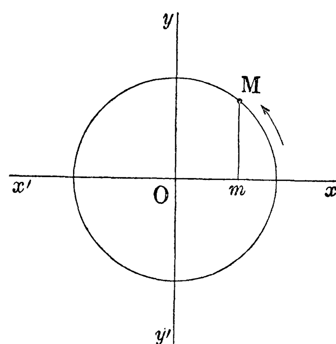


Fig. 35

Prenons ces deux axes $x'x$ et $y'y$ (*fig.* 35) comme axes de coordonnées ; les équations du mouvement étant alors

$$(7) \qquad \begin{cases} x = a\cos(\alpha t + \beta), \\ y = a\sin(\alpha t + \beta), \end{cases}$$

on voit tout de suite que la trajectoire est le cercle représenté par l'équation

$$x^2 + y^2 = a^2 ;$$

ainsi, le mouvement est circulaire.

Il est de plus *uniforme,* car les composantes de la vitesse suivant les axes sont

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\,a\alpha\,\sin(\alpha t + \beta), \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = a\alpha\,\cos(\alpha t + \beta), \end{cases}$$

et montrent que si, pour fixer les idées, on suppose a et α positifs, la valeur absolue de la vitesse est $a\alpha$. Les formules (7) ou (8) montrent en outre que le mouvement de la projection sur Ox, au début, est un mouvement rétrograde, tandis que celui de la projection sur Oy est direct ; d'où il résulte que le mouvement sur le cercle s'effectue lui-même dans le sens direct des arcs.

Enfin les composantes de l'accélération sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha^2 x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\alpha^2 y\,;$$

elles sont donc proportionnelles aux coordonnées du point mobile, et par suite l'accélération est dirigée vers le point O et est normale au cercle, ainsi que l'on devait s'y attendre (65); sa valeur est $\frac{v^2}{a}\cdot$

99. **Problème III.** — *Étudier le mouvement d'un point dans l'espace, sachant que les mouvements des projections sur trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz (fig. 36) *sont des mouvements vibratoires simples de même durée.*

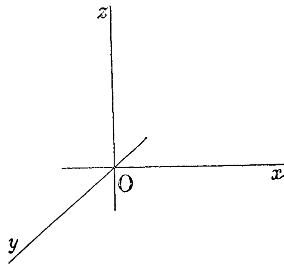


Fig. 36

Soient

$$(9)\quad \begin{cases} x = a\cos(\omega t + \alpha), \\ y = b\cos(\omega t + \beta), \\ z = c\cos(\omega t + \gamma) \end{cases}$$

les équations des mouvements des projections, c'est-à-dire les équations de la trajectoire.

Cherchons d'abord, si c'est possible, la nature de cette courbe. Pour cela, commençons par mettre les équations (9) sous la forme

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{x}{a} = \cos\omega t\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha, \\ \frac{y}{b} = \cos\omega t\cos\beta - \sin\omega t\sin\beta, \\ \frac{z}{c} = \cos\omega t\cos\gamma - \sin\omega t\sin\gamma, \end{cases}$$

et exprimons ensuite $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$ en fonction rationnelle d'un paramètre λ au moyen des formules

$$\cos \omega t = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2},$$

$$\sin \omega t = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2};$$

les expressions des coordonnées deviennent ainsi

$$x = a \frac{(1 - \lambda^2) \cos \alpha - 2\lambda \sin \alpha}{1 + \lambda^2},$$

$$y = b \frac{(1 - \lambda^2) \cos \beta - 2\lambda \sin \beta}{1 + \lambda^2},$$

$$z = c \frac{(1 - \lambda^2) \cos \gamma - 2\lambda \sin \gamma}{1 + \lambda^2},$$

et il est manifeste alors qu'elles représentent une courbe du second degré dont les points à l'infini sont imaginaires, c'est-à-dire une ellipse.

Ainsi, le mouvement que nous étudions est un mouvement elliptique.

On obtient aisément l'équation du plan de cette ellipse : il suffit pour cela d'éliminer $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$ entre les équations (10), ce qui conduit à l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a} & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \frac{y}{b} & \cos \beta & \sin \beta \\ \frac{z}{c} & \cos \gamma & \sin \gamma \end{vmatrix} = 0;$$

d'où il suit que le plan de la courbe passe par l'origine.

Étudions maintenant la vitesse du mobile sur sa trajectoire ; elle est définie par les équations

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \alpha),$$

$$\frac{dy}{dt} = -b\omega \sin(\omega t + \beta),$$

$$\frac{dz}{dt} = -c\omega \sin(\omega t + \gamma),$$

qui permettent d'obtenir une propriété remarquable du mouvement. Si on les rapproche en effet des équations (9), on en tire les trois nouvelles équations

$$(11) \qquad \begin{cases} x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt} = \sin(\alpha - \beta), \\ y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt} = \sin(\beta - \gamma), \\ z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt} = \sin(\gamma - \alpha). \end{cases}$$

Nous allons interpréter ces trois équations. Prenons par exemple la première ; si l'on pose

$$x = r\cos\theta,$$

$$y = r\sin\theta,$$

on en déduit

$$\frac{dx}{dt} = \cos\theta\frac{dr}{dt} - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin\theta\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt},$$

et par suite

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt}.$$

L'équation considérée peut donc s'écrire

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \sin(\alpha - \beta);$$

mais, sous cette forme, le premier membre représente le double de la vitesse aréolaire de la projection du mobile sur le plan des xy, l'origine étant le centre des aires. Les équa-

tions (11) expriment donc que les aires décrites par le rayon vecteur qui va de l'origine à la projection du mobile sur l'un quelconque des plans coordonnés, sont proportionnelles aux temps employés à les décrire. D'autre part, l'aire d'une figure plane est proportionnelle à celle de sa projection orthogonale sur un plan. On conclut alors de là que, dans le mouvement étudié, les aires décrites par le rayon vecteur qui va de l'origine au point mobile sont proportionnelles aux temps employés à les décrire.

Il nous reste à dire quelques mots de l'accélération : elle est définie par les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -b\omega^2 \cos(\omega t + \beta),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -c\omega^2 \cos(\omega t + \gamma),$$

que l'on peut, en tenant compte des équations du mouvement, écrire sous la forme plus simple

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z.$$

Sous cette forme, on voit que les composantes de l'accélération sont proportionnelles à $-x$, $-y$, $-z$, ce qui indique que, si l'on désigne par M la position du mobile sur sa trajectoire à un instant quelconque t, l'accélération, au même instant, est proportionnelle au vecteur MO et a même direction que lui.

On peut ajouter, ce qui est du reste bien évident sur les

équations (9), que le mouvement est périodique et que l'amplitude de la période est $\frac{2\pi}{\omega}$.

100. Application de la considération de l'accélération à la détermination des rayons de courbure. — Dans la représentation de l'accélération par un vecteur, nous avons vu que la composante normale de l'accélération, quand le mobile occupe une position M sur sa trajectoire, s'exprime en fonction de la vitesse et du rayon de courbure en M par la formule

$$\gamma_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Il suit de là, que si l'on connaît la vitesse et l'accélération du mobile à un instant donné, quand le mobile traverse un point quelconque M de sa trajectoire, on obtient le rayon de courbure de cette courbe en M en divisant le carré de la vitesse par la composante normale de l'accélération.

101. Exemple I. — *Rayon de courbure de la cycloïde.* — Le mouvement d'un point sur une cycloïde peut être considéré (108) comme résultant :

1° D'un mouvement de translation uniforme commun à tous les points du cercle générateur :

2° D'un mouvement uniforme sur le cercle générateur, avec une vitesse égale à celle du mouvement de translation.

Soient alors O (*fig.* 37) le cercle générateur à un instant donné et M la position du point décrivant ; en appelant A le point de contact du cercle avec la droite $x'x$ sur laquelle il roule et A′ le point diamétralement opposé au point A, MA′ est la tangente en M à la cycloïde et MA est la nor-

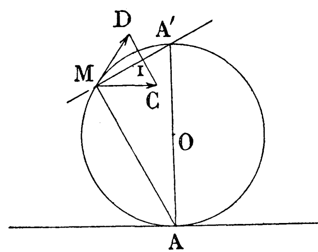


Fig. 37

male au même point. Nous appellerons R le rayon du cercle et nous poserons

$$MA = l.$$

Cela posé, puisque la vitesse de translation est constante, l'accélération du point M est due uniquement au mouvement de rotation sur le cercle ; si donc ω est la vitesse angulaire de ce mouvement, comme sa vitesse est ωR, l'accélération est $\frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$ et est dirigée suivant le rayon MO. Sa projection sur la normale est donc $\omega^2 \times$ proj. R, c'est-à-dire

$$\frac{\omega^2 l}{2};$$

d'autre part, si MC et MD sont les deux vitesses composantes, égales d'ailleurs à ωR, dans le triangle isocèle MCD on a

$$MI = MC \cos \widehat{CMA'}$$

ou bien encore

$$MI = \omega R \cos \widehat{MAA'} = \omega \frac{l}{2},$$

d'où l'on tire

$$2MI = \omega l.$$

Or, 2MI est la vitesse absolue du point M, et si l'on appelle ρ le rayon de courbure de la cycloïde en ce point, l'expression de l'accélération normale est aussi

$$\frac{\omega^2 l^2}{\rho}.$$

En comparant avec la première expression trouvée, on obtient

$$\frac{\omega^2 l^2}{\rho} = \frac{\omega^2 l}{2},$$

et finalement

$$\rho = 2l = 2MA.$$

Ainsi, le rayon de courbure de la cycloïde est le double de la normale limitée au point de contact du cercle O *et de la droite* x′x.

102. **Exemple II.** — *Rayon de courbure de l'hélice.* — On sait que l'*hélice* est une courbe tracée sur un cylindre quelconque et qui coupe sous un angle constant toutes les génératrices de cette surface. Supposons-la décrite par un point M (*fig.* 38), d'un mouvement uniforme, et soit $v = MA$ la vitesse de ce mouvement. Menons par M la section droite du cylindre, et décomposons la vitesse en deux autres, MB et MC, dirigées respectivement suivant la tangente en M à la section droite et suivant la génératrice MG du cylindre. Si l'on appelle γ l'angle constant sous lequel l'hélice coupe toutes les génératrices, on a d'ailleurs

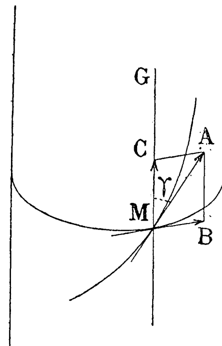


Fig. 38

$$MB = v \sin \gamma,$$
$$MC = v \cos \gamma.$$

Il résulte de là que l'on peut considérer le mouvement du point M sur l'hélice comme résultant :

1° D'un mouvement de translation de la section droite parallèlement aux génératrices et avec la vitesse constante $v \cos \gamma$;

2° D'un mouvement uniforme sur la section droite avec la vitesse $v \sin \gamma$.

Soit ρ' le rayon de courbure en M de la section droite; l'accélération totale provient uniquement du mouvement sur la section droite, et est, par suite, égale à l'accélération normale $\frac{v^2 \sin^2 \gamma}{\rho'}$ de ce mouvement, puisqu'il est uniforme. Mais le mouvement sur l'hélice étant lui-même uniforme, l'accélération totale est dirigée suivant la normale principale en M

à l'hélice, et est égale à $\frac{v^2}{\rho}$, ρ désignant le rayon de courbure de l'hélice. En égalant les deux expressions de l'accélération totale, on obtient

$$\rho = \frac{\rho'}{\sin^2 \gamma}.$$

On voit, de plus, que l'accélération totale devant être à la fois normale principale à l'hélice et normale à la section droite au même point, *en chaque point d'une hélice la normale principale est confondue avec la normale à la section droite ou, ce qui revient au même, avec la normale au cylindre.*

EXERCICES SUR LE LIVRE PREMIER

1. Établir, par la considération des produits géométriques de vecteurs, la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

entre les côtés et l'angle A d'un triangle.

2. Dans un triangle ABC on désigne par h la hauteur issue du sommet A et par β et γ les segments qu'elle détermine sur le côté opposé ; prouver, au moyen des produits géométriques de vecteurs, que l'on a

$$h^2 - \beta\gamma = bc \cos A.$$

3. Établir, par les mêmes considérations de produits géométriques de vecteurs, la formule qui donne le carré de la distance de deux points en géométrie analytique à trois dimensions.

4. Plus généralement, prouver que l'on a

$$a^2 = \Sigma a_i^2 + 2\Sigma a_i a_j \cos (a_i, a_j),$$

a_1, a_2,...... a_n désignant des vecteurs et a leur vecteur résultant.

5. Trouver le cosinus de l'angle de deux directions connaissant leurs paramètres directeurs par rapport à trois axes de coordonnées.

6. Établir la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

7. Trouver la loi des espaces, sachant que la courbe des vitesses est une circonférence ayant son centre à l'origine.

8. La vitesse d'un point matériel en mouvement est propor-

tionnelle à la puissance m de l'espace ; trouver la relation entre l'espace et le temps. Cas où $m = \frac{1}{2}$.

9. Entre l'accélération γ et la vitesse v d'un point matériel en mouvement, on a la relation

$$\gamma = -g\left(1 + \frac{v}{a}\right),$$

g et a désignant des constantes ; trouver la loi des vitesses et la loi des espaces.

10. Même question en supposant

$$\gamma = g\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right).$$

11. Même question en supposant

$$\gamma = -\frac{g}{a} v^2.$$

12. Étudier le mouvement dans lequel l'accélération est proportionnelle à l'espace parcouru.

13. L'espace parcouru par un point matériel en mouvement est lié au temps par la relation

$$S = at^3 + bt^2 + ct + d ;$$

construire, par rapport aux mêmes axes, la courbe des espaces, la courbe des vitesses et la courbe des accélérations.

14. Prouver que l'accélération d'un point est égale au carré de la vitesse divisé par la moitié de la corde déterminée par l'accélération dans le cercle osculateur.

15. Un point matériel de poids p est en mouvement ; que doit être l'accélération pour que la trajectoire soit un cercle ayant pour centre un point donné, et pour que le mouvement du point matériel sur ce cercle soit uniforme et animé d'une vitesse angulaire ω ? (Résal.)

16. Un point M décrit une droite Δ d'un mouvement uniforme et avec une vitesse $a\omega$, pendant que la droite Δ tourne

autour d'un point fixe avec une vitesse angulaire constante ω ; *construire la tangente* en un point quelconque de la trajectoire du point (spirale d'Archimède).

17. On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et l'on considère un point mobile M, situé d'abord sur Ox, et qui se meut de manière que son ordonnée et l'angle de son rayon vecteur avec Ox croissent proportionnellement au temps, et de manière que le mobile vienne sur Oy à une distance a de l'origine ; trouver la trajectoire (Quadratrice de Dinostrate), la vitesse en chaque point, l'accélération et le rayon de courbure.

18. Construire la tangente à la conchoïde de la droite.

19. Construire la tangente au lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes est égal à un rapport donné $\frac{m}{n}$.

20. On donne deux droites fixes X et Y et un point O ; on mène par ce point une sécante variable rencontrant X et Y aux points respectifs A et B, et l'on prend le point I tel que $\frac{AI}{IB} = \frac{m}{n}$; construire la tangente au lieu décrit par le point I.

21. Trouver le rayon de courbure de la spirale d'Archimède.

22. Un point matériel parcourt une ellipse d'un mouvement dont l'accélération kr est proportionnelle à la distance r au centre et dirigée vers ce point ; il part d'un point situé sur le grand axe $2a$, avec une vitesse $v_0 = b\sqrt{k}$, b désignant le petit axe ; trouver le rayon de courbure de l'ellipse.

23. On suppose une ellipse parcourue par un mobile dont l'accélération dirigée vers un foyer, est en raison inverse du carré de la distance ; en déduire le rayon de courbure de l'ellipse.

24. Quelle est, parmi toutes les courbes passant par le même point A et comprises dans le même plan vertical, celle pour laquelle un point pesant partant du repos en A parcourt un arc de

longueur quelconque dans le même temps qu'il mettrait à décrire la corde correspondante ?

25. Prouver que le centre de courbure de la parabole se projette sur le prolongement du rayon vecteur en un point distant du foyer d'une longueur égale à ce rayon. On supposera la parabole parcourue par un mobile d'un mouvement tel que la vitesse aréolaire, par rapport au foyer pris comme centre des aires, soit constante.

26. Un mobile parcourt une droite Ox dans le sens Ox, en partant d'un point A de cette droite, et sa vitesse, à chaque instant, est inversement proportionnelle à sa distance au point O ; trouver l'espace, la vitesse et l'accélération en fonction du temps.

27. Même question en supposant que la vitesse soit proportionnelle à la distance au point O.

28. Un cercle de rayon r roule sans glisser sur une droite d'un mouvement uniforme ; étudier le mouvement d'un point sur la circonférence.

29. Une droite BB′, de longueur donnée $2p$, est touchée, à un instant donné, en son milieu A, par un cercle donné O. On suppose que le point A se déplace sur la circonférence d'un mouvement uniforme avec une vitesse angulaire ω pendant que la droite BB′ tourne autour du point mobile d'un mouvement uniforme, dans le même sens et avec la vitesse angulaire $\frac{\omega}{2}$; étudier le mouvement du point B.

30. Un cercle de rayon r tourne autour d'un de ses diamètres avec une vitesse angulaire constante ω. Un point se meut sur la circonférence mobile avec la même vitesse angulaire ω ; trouver les équations du mouvement et de la trajectoire, ainsi que la vitesse et l'accélération.

31. Le foyer d'une parabole étant pris comme centre des aires, on suppose la courbe parcourue par un mobile avec une vitesse aréolaire constante. On fait passer un cercle par le foyer, le som-

met et le point mobile ; étudier le mouvement du centre du cercle. On comptera les aires à partir du rayon vecteur qui va du foyer au sommet.

32. Un point matériel parcourt une lemniscate de Bernouilli avec une vitesse constante ; trouver son accélération et en déduire le centre de courbure en chaque point de la courbe.

(De Saint-Germain.)

33. Soit c la demi-distance focale d'une ellipse de centre O. Un point décrit la podaire de cette ellipse par rapport au point O avec une vitesse aréolaire constante $\frac{1}{2}c^2$, le point O étant pris comme centre des aires ; trouver la vitesse, l'accélération et le rayon de courbure. (De Saint-Germain.)

34. On donne un point O et l'on considère un point M mobile de manière que sa vitesse soit proportionnelle à la puissance $n-1$ du rayon vecteur OM ; déterminer la trajectoire et l'accélération du point M. Examiner les cas particuliers où n a l'une des valeurs 2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, -1.

35. Une droite de longueur constante se meut de manière que ses extrémités A et B décrivent deux droites rectangulaires Ox et Oy ; on sait de plus que le point A est animé d'un mouvement uniforme de vitesse v. Déterminer à un instant quelconque l'accélération d'un point M de la droite.

36. Les extrémités d'une droite de longueur constante glissent l'une, A, sur un cercle O de rayon r, l'autre, B, sur un diamètre Ox de ce cercle. On suppose que le mouvement du point A soit uniforme avec la vitesse angulaire ω et l'on demande d'étudier le mouvement du point B.

37. Les données étant les mêmes, on suppose que le mouvement du point B soit uniforme et l'on propose de déterminer le mouvement du point A.

38. On donne un point O et une droite D. Un cercle de grandeur constante passe par le point O et tourne autour de ce

point d'un mouvement uniforme. Soit M le point de rencontre avec D d'une tangente au cercle perpendiculaire à D ; étudier le mouvement du point M.

39. Un point M parcourt une courbe (C) d'un mouvement quelconque ; sur la tangente en M à cette courbe on porte une longueur constante MN. Prouver que la normale en N à la trajectoire de ce point passe par le centre de courbure en M de la courbe (C).

40. Un point M se meut d'un mouvement uniforme sur une circonférence de centre O, pendant que le point O décrit, en sens contraire, sur une autre circonférence, des arcs de même graduation ; étudier le mouvement du point M.

41. Un point parcourt une hélice d'un mouvement uniforme ; étudier le mouvement de sa projection sur un plan passant par l'axe du cylindre de révolution sur lequel l'hélice est tracée.

42. Un point décrit un diamètre AB d'un cercle avec une vitesse proportionnelle à l'ordonnée correspondante ; étudier son mouvement.

43. Un point se meut sur une courbe avec une vitesse constante et de manière que la composante de cette vitesse suivant une droite donnée soit proportionnelle au temps ; trouver cette courbe. (JULLIEN.)

LIVRE II

DYNAMIQUE

DU POINT MATÉRIEL

CHAPITRE PREMIER

LES PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA DYNAMIQUE

103. **Objet de la dynamique.** — La dynamique a pour objet l'étude du mouvement et des forces qui le produisent. Elle repose sur des principes qui nous sont fournis par l'observation des phénomènes naturels. Ces principes ne sont pas évidents *a priori* et leur vérification immédiate est impossible ; mais leur exactitude est démontrée *a posteriori* par l'exactitude de leurs conséquences. Ils sont au nombre de deux : le *principe de l'inertie* et le *principe des mouvements relatifs.*

104. **Principe de l'inertie.** — Il comprend deux parties :

1° *L'état de mouvement ou de repos d'un point matériel ne peut être modifié que par l'intervention d'une force ;*

2° *Si un point matériel est en mouvement sans qu'aucune force agisse sur lui, le mouvement est rectiligne et uniforme.*

La première partie de ce principe est si bien connue qu'elle paraît évidente ; pour la deuxième, nous donnerons un exemple classique.

105. Exemple. — Une bille, lancée sur un plan horizontal parfaitement poli, se meut d'un mouvement uniforme. A la longue, il est vrai, la vitesse finit par diminuer ; mais cette diminution est d'autant plus faible que le plan et la bille sont plus parfaitement polis ; cela tient à ce que dans la nature il est impossible d'éviter les frottements. On conçoit toutefois que si le plan et la bille étaient parfaitement polis et si l'on pouvait supprimer la résistance de l'air, le mouvement se continuerait indéfiniment suivant une ligne droite et avec une vitesse constante.

106. **Conséquences.** — 1° *L'effet d'une force sur un point matériel libre est de changer son état de repos ou de mouvement.*

On dit qu'un point matériel est libre quand il peut se déplacer dans toutes les directions de l'espace.

Cette définition étant donnée, imaginons qu'à un instant quelconque on fasse agir une force sur un point matériel libre. Son état de repos ou de mouvement sera changé ; car, s'il n'était pas changé, il serait le même avec la force ou sans la force ; celle-ci serait équivalente à l'absence de force, c'est-à-dire qu'elle n'existerait pas.

2° Concevons qu'un point matériel en mouvement sous l'action d'une force décrive une courbe (C) (*fig.* 39). Si la force cesse d'agir quand le point est en A, sur sa trajectoire, en vertu de la deuxième partie, le mouvement se continue suivant la direction de la vitesse en A, c'est-à-dire suivant la tangente, et avec une vitesse constante égale à celle qu'il possède quand il traverse le point A, au moment où la force cesse d'agir.

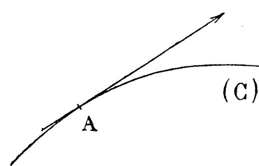


Fig. 39

107. **Direction d'une force; point d'application.** — Supposons qu'à un instant donné un point matériel M (*fig.* 40), primitivement au repos, se mette en mouvement; nous pouvons dire, en vertu du principe de l'inertie, qu'une force agit sur lui, et nous dirons aussi que cette force est appliquée au point M.



Fig. 40

Au début de son mouvement, le point se déplace dans une certaine direction tangente en M à la trajectoire qu'il décrit : cette direction s'appelle la *direction de la force*. Par définition donc, la direction d'une force est la direction du déplacement qu'elle imprime au début du mouvement à un point matériel partant du repos.

108. **Forces égales; somme de deux ou de plusieurs forces.** — On dit que deux forces *sont égales*, lorsque, appliquées dans des directions opposées au même point matériel libre et en repos, elles le laissent en repos.

Quand un point matériel soumis à l'action de plusieurs forces demeure en repos, on dit qu'il est *en équilibre* ou que les forces *se font équilibre*.

On dit qu'une force F est la somme de plusieurs autres forces $F_1, F_2, \ldots F_n$, lorsqu'elle fait équilibre à toutes ces forces appliquées en même temps que F dans une direction opposée à celle de F, au même point matériel libre et au repos.

109. **Mesure des forces.** — Ces définitions suffisent pour effectuer la mesure des forces. On en déduit en effet, par un procédé bien connu qui revient dans toutes les questions relatives à la mesure des grandeurs, la définition d'une force multiple ou sous-multiple d'une force donnée, ainsi que celle d'une force égale à $\frac{p}{q}$ fois une autre force donnée, etc.

On effectue d'ailleurs la comparaison des forces entre elles, c'est-à-dire leur *mesure*, au moyen d'une force arbitraire que l'on prend pour unité ; la force généralement prise pour unité est le kilogramme, c'est-à-dire le poids, à Paris, d'un décimètre cube d'eau distillée à 4°,1. Quant à la comparaison des forces au poids, elle se fait au moyen d'instruments qu'on appelle des *dynamomètres* et dont on trouvera la description dans tous les cours de physique.

110. **Intensité d'une force.** — On appelle *intensité* d'une force le nombre qui mesure cette force au moyen de l'unité choisie.

111. **Représentation géométrique des forces.** — On peut représenter géométriquement une force par un vecteur ayant pour origine et pour direction le point d'application et la direction de la force ; quant à la grandeur du vecteur, on l'obtient en prenant une longueur arbitraire pour représenter l'unité de force, et en portant sur la direction du vecteur une longueur dont la mesure à l'aide de cette unité soit égale à l'intensité de la force à représenter.

112. **Force constante.** — On dit qu'une force est constante en grandeur et en direction, lorsqu'elle conserve constamment la même intensité et la même direction.

En un même lieu, le poids d'un corps, dont la définition exacte sera donnée plus loin, est une force constante en grandeur et en direction ; et c'est pour cette raison qu'on a pris le kilogramme pour unité de force.

113. **Principe des mouvements relatifs.** — *Lorsqu'un système de points matériels* libres *est animé d'un mouvement de* translation *quelconque, toute force agissant sur un point du système, lui imprime le même mouvement relatif que si le système était au repos.*

Ce principe est dû à Galilée.

114. Exemple. — Si on laisse tomber une bille dans un wagon, le point de chute est toujours le même, que le wagon soit au *repos* ou en mouvement *uniforme.*

115. **Conséquence.** — *Si, parmi les forces qui agissent sur un point matériel libre* M, *on considère en particulier une force* F *constante ou variable, le mouvement du point s'obtient en composant, par les règles des mouvements relatifs, celui que prendrait le point* M *partant du repos et soumis seulement à la force* F *avec celui que prendrait ce point si l'on supprimait la force* F.

En effet, on peut considérer le point M comme faisant partie d'un système qui aurait le même mouvement de translation que le point M quand la force F n'agit pas sur lui; si alors on fait agir la force F sur le point M seul, on se trouve dans les conditions de la loi de Galilée, et le mouvement relatif sera le même que si le système était au repos.

Donc, pour avoir le mouvement absolu du point M, il suffira de composer, au moyen des règles établies en cinématique, le mouvement qu'aurait le point, abstraction faite de la force F, avec celui du point M dans le système si celui-ci était au repos et que la force F agisse seule.

116. Remarque. — Ce qu'on vient de dire contient les deux lois suivantes, qu'on invoque souvent pour établir la dynamique :

1° *Loi de l'indépendance de l'effet des forces.* — Lorsque plusieurs forces agissent sur un point matériel libre, chacune agit comme si elle était seule ; c'est-à-dire qu'il suffit, pour avoir le mouvement, de composer ceux que produiraient séparément les différentes forces.

2° *Loi de l'indépendance entre les vitesses acquises et les vitesses imprimées par les forces.* — Lorsqu'un point matériel libre en mouvement est animé d'une vitesse v, si l'on fait

agir une force sur ce point, le mouvement que cette force imprime au point est indépendant de la vitesse acquise v et est le même que si le point matériel partait du repos. Le mouvement résultant s'obtient, par suite, en composant le mouvement dû à la vitesse acquise avec celui qu'imprimerait la force si cette vitesse acquise n'existait pas. Le raisonnement est le même que celui du numéro précédent.

Voici maintenant une autre conséquence importante du principe des mouvements relatifs et du principe de l'inertie.

117. **Théorème.** — *Lorsqu'un point matériel est en mouvement sous l'action d'une seule force constante ou variable, celle-ci a, à chaque instant, la même direction que l'accélération totale du mobile.*

Soit en effet A (*fig.* 41) la position du mobile au temps t et soit v sa vitesse, dirigée suivant la tangente en A à la trajectoire. Si à cet instant la force cessait d'agir, en vertu du principe de l'inertie, le mouvement deviendrait rectiligne et uniforme suivant la tangente en A et avec la vitesse v. Soit M_1 la position qu'occuperait le mobile au temps $t + \Delta t$ en vertu de ce mouvement et soit M la position qu'il occupe réellement au même instant sur la trajectoire ; cela signifie que AM peut être considéré comme le déplacement résultant de deux mouvements : 1° le mouvement uniforme suivant la tangente avec la vitesse v ; 2° le mouvement dû à l'action de la force. Or, AM est la somme géométrique de AM_1 et de M_1M, et comme AM_1 est le déplacement dû au mouvement uniforme, il s'ensuit que M_1M est le déplacement dû à l'action de la force. D'autre part, le mouvement imprimé

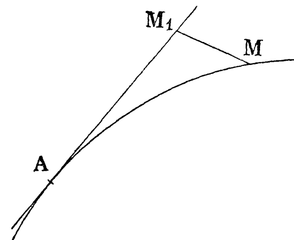


Fig. 41

par la force à un instant quelconque est le même que si le point partait du repos ; donc M_1M représente le déplacement que la force imprimerait au point matériel pendant le temps très court Δt et si le point partait du repos ; il suit de là et de la définition de la direction d'une force, que M_1M représente la direction de la force considérée pendant le temps Δt. Mais la direction M_1M est la même que celle de l'accélération élémentaire, et sa limite, quand Δt tend vers zéro, est celle de l'accélération totale ; d'autre part, cette limite est aussi la direction de la force à l'instant t, ce qui démontre la proposition.

118. **Théorème.** — *Une force constante en grandeur et direction, agissant sur un point matériel qui part du repos ou qui est animé d'un mouvement uniforme dans la direction de cette force, donne à ce point un mouvement rectiligne et uniformément varié.*

En effet, soit v_0 la vitesse initiale du point ou, si l'on veut, sa vitesse à un instant quelconque ; si aucune force n'agissait sur lui, la vitesse resterait v_0 ; d'autre part, si le point partait du repos sous l'action de la force constante F, agissant dans la direction v_0, il aurait au bout du temps t une certaine vitesse γ. Les deux mouvements se composant d'après la règle des mouvements relatifs, la vitesse réelle au bout du temps t sera $v_0 + \gamma$. Ainsi, au bout du temps t, quelle que soit la vitesse v_0, la vitesse du mobile s'accroît de γ ; par conséquent, au bout d'un nouvel intervalle de temps t, cette vitesse s'accroît encore de γ, et ainsi de suite. La vitesse s'accroît donc de quantités égales dans des temps égaux, c'est-à-dire que le mouvement est uniformément varié.

119. **Théorème.** — *Réciproquement, si un point matériel a un mouvement rectiligne et uniformément varié, il est soumis à une force constante ayant pour direction celle du mouvement du point.*

1° Le point matériel est soumis à une force, car autrement le mouvement serait uniforme ;

2° La force est constante en grandeur, car autrement les accélérations ne seraient pas les mêmes dans des temps égaux ;

3° La force a pour direction celle du déplacement, car autrement elle donnerait un déplacement dans une autre direction, déplacement qui, composé avec la vitesse acquise, ferait décrire au point une ligne différente de la droite qu'il décrit.

120. Exemple. — Lorsqu'un corps tombe dans le vide en partant du repos, on reconnaît que le mouvement est rectiligne et uniformément accéléré. L'accélération de ce mouvement en un même lieu est la même pour tous les corps ; on la représente par la lettre g, et elle est égale à 9,8088 à Paris. Il résulte alors du théorème précédent, que tout corps qui tombe dans le vide est soumis à l'action d'une force constante en grandeur et direction : cette force est ce qu'on appelle le *poids du corps*.

CHAPITRE II

MOUVEMENT DES PROJECTILES DANS LE VIDE

121. Nous allons, avant d'aller plus loin, appliquer les résultats obtenus dans le chapitre précédent à l'étude du mouvement des *projectiles* dans le vide. Un *projectile* est un corps soumis à l'action de la pesanteur et lancé dans une certaine direction avec une vitesse initiale donnée. Nous supposerons le corps réduit à un point matériel et nous négligerons la résistance de l'air ; de sorte que la question se ramène à l'étude du mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force constante en grandeur et en direction, et auquel on a imprimé une vitesse initiale donnée. Nous appellerons g l'accélération imprimée par la pesanteur à ce point matériel partant du repos et nous diviserons le problème en plusieurs autres.

122. Problème I. — *Étudier le mouvement d'un point matériel pesant abandonné à lui-même sans vitesse initiale à une certaine hauteur au-dessus du sol.*

Appelons x le chemin parcouru par le mobile pendant le temps t et compté à partir du point de départ. Le point étant soumis à une force constante, son mouvement est uniformément accéléré ; si donc g est l'accélération dirigée dans le même sens que la force, c'est-à-dire de haut en bas, on a, en vertu des formules qui ont été établies en cinématique,

$$(1) \qquad x = \frac{1}{2} g t^2,$$

et par suite

$$v = gt. \tag{2}$$

La première de ces deux formules donne l'espace parcouru pendant le temps t, et la deuxième donne la vitesse au bout du même temps. Si on élimine t entre les deux, on obtient

$$v^2 = 2gx,$$

formule qui fait connaître la vitesse en fonction de l'espace parcouru.

123. Application. — *Un point matériel pesant est abandonné à lui-même sans vitesse initiale sur la verticale* xx′ (fig. 42). *Il occupe une position donnée* A *à un instant inconnu et parcourt un chemin donné* h *pendant le temps* θ, *à partir de cet instant ; trouver sa position initiale.*

Soit O la position initiale du mobile. Posons $OA = x$ et appelons t le temps employé à parcourir ce chemin ; on a en vertu de l'équation (1)

$$x = \frac{1}{2} gt^2.$$

D'autre part, à la suite du chemin x et pendant le temps θ, le mobile parcourt le chemin h, c'est-à-dire, qu'il parcourt le chemin $x + h$ pendant le temps $t + \theta$; la même formule donne donc encore

$$x + h = \frac{1}{2} g(t + \theta)^2.$$

Ces deux équations font connaître t et x.

On en tire d'abord par soustraction

$$t = \frac{2h - g\theta^2}{2g\theta}$$

et ensuite

$$x = \frac{(2h - g\theta^2)^2}{8g\theta^2}.$$

x′
O
A
B
x

Fig. 42

Pour que le problème soit possible il faut que t soit positif, ce qui exige que l'on ait $h > \frac{g\vartheta^2}{2}$.

124. **Problème II.** — *Étudier le mouvement d'un point matériel pesant lancé verticalement de haut en bas avec une vitesse initiale* v_0.

Le mouvement du mobile est encore un mouvement uniformément accéléré et peut être considéré comme résultant de deux autres s'effectuant de haut en bas suivant la verticale :

1° Un mouvement uniforme avec la vitesse v_0 et en vertu duquel l'espace parcouru au bout du temps t est $v_0 t$;

2° Un mouvement uniformément accéléré qui est le même que si le point partait du repos, dont l'accélération est g, et dont par suite le chemin parcouru pendant le temps t est $\frac{1}{2} gt^2$. Le chemin parcouru pendant le même temps dans le mouvement résultant sera donc

(3) $$x = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2;$$

on tire de là la formule

(4) $$v = v_0 + gt$$

pour calculer la vitesse.

125. Remarque. — On aurait pu écrire les deux formules (3) et (4) immédiatement, puisqu'on sait que le mouvement est uniformément accéléré, que la vitesse initiale est v_0 et l'accélération g.

126. **Problème III.** — *Étudier le mouvement d'un point matériel pesant lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale* v_0.

Prenons comme direction positive sur la verticale Ox

(*fig.* 43) la direction contraire à celle de la pesanteur et soit O le point de départ du mobile. On peut encore considérer le mouvement comme résultant de deux autres :



Fig. 43

1° Un mouvement uniforme suivant Ox avec la vitesse initiale v_0 ; 2° un mouvement uniformément varié suivant Ox' avec l'accélération g que la pesanteur imprime au point matériel partant du repos. En vertu du premier mouvement l'abscisse du mobile par rapport au point O est $v_0 t$, au bout du temps t écoulé à partir de l'instant où le point a été lancé ; en vertu du second l'abscisse au bout du même temps est $-\frac{1}{2}gt^2$ puisque le mouvement s'effectue dans le sens des abscisses négatives. L'abscisse du point dans le mouvement résultant sera donc

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 ; \tag{5}$$

on en déduit la formule des vitesses

$$v = v_0 - gt, \tag{6}$$

et l'élimination de t entre les deux équations donne

$$v^2 = v_0^2 - 2gx : \tag{7}$$

cette nouvelle formule donne l'expression de la vitesse en fonction de l'abscisse.

Voici quelles sont les propriétés du mouvement déduites des équations (5), (6) et (7) :

1° D'après l'équation (6) la vitesse diminue lorsque t augmente ; elle devient nulle pour $t = \frac{v_0}{g}$, de sorte que si l'on fait croître t de zéro à $\frac{v_0}{g}$ la vitesse décroît de v_0 à zéro. En se reportant à l'équation (5) on voit que pendant le même temps l'espace parcouru x est positif et croît, parce

que dans le trinome du second degré qui figure au second membre le coefficient de t^2 est négatif; d'ailleurs $\frac{v_0}{g}$ est égal à la demi-somme des racines, et par suite lorsque $t = \frac{v_0}{g}$ la valeur de x est maximum : cette valeur maximum est égale à $\frac{v_0^2}{2g}$ et, en se reportant à la formule $v = \sqrt{2gh}$ du problème I, on reconnaît que la hauteur maximum à laquelle s'est élevé le mobile *est celle de laquelle il faudrait le laisser tomber, sans vitesse initiale, pour lui faire acquérir la vitesse* v_0 *à la fin de sa chute.*

2° Lorsque t continue à croître à partir de $\frac{v_0}{g}$, la vitesse devient négative, x diminue et le mobile descend d'un mouvement uniformément accéléré; x devient nul lorsque $t = \frac{2v_0}{g}$, d'où il suit que *le mobile met à descendre le même temps qu'à monter*. Ajoutons, ce qui est évident sur l'équation (6), que sa vitesse quand il revient au point de départ est égale à $-v_0$, c'est-à-dire à la vitesse au départ changée de signe.

3° Il résulte du reste de l'équation (5) et des propriétés du trinome du second degré qu'il y a deux valeurs de t pour lesquelles l'abscisse x est la même, pourvu qu'elle soit inférieure à la valeur maximum $\frac{v_0^2}{2g}$; ces deux valeurs de t sont équidistantes de la demi-somme, $\frac{v_0}{g}$, des racines. On voit donc que le mobile passe deux fois par toute position M située entre le sol et le point le plus élevé A; on voit de plus que le temps qu'il emploie pour aller de M en A en montant est égal au temps employé pour descendre de A en M; on voit enfin, en se reportant à l'équation (6), que les vitesses du mobile au moment de ses deux passages en un point M sont égales et de signes contraires, puisque les

valeurs de t qui correspondent à ces deux passages sont équidistantes de $\frac{v_0}{g}$.

127. **Problème IV.** — *Étudier le mouvement d'un point matériel pesant lancé dans une direction donnée avec une vitesse initiale donnée.*

Soit O le point de départ (*fig.* 44) et OA la direction donnée ; appelons α l'angle que cette direction fait avec sa projection sur un plan horizontal et soit v_0 la vitesse initiale du mobile. Comme la pesanteur agit dans le plan vertical qui contient OA, le point matériel ne sortira pas de ce plan vertical. Rapportons donc le mouvement à deux axes

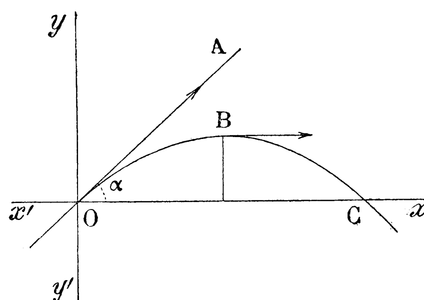


Fig. 44

rectangulaires situés dans ce plan, savoir : la verticale yOy' et la perpendiculaire xOx'. Prenons du reste comme direction des abscisses positives celle qui fait l'angle aigu α avec la direction OA, et pour direction positive des ordonnées la direction de la verticale qui est dirigée vers le haut. Soit enfin g l'accélération communiquée par la pesanteur au point matériel.

Cela posé, le mouvement de ce point peut être considéré comme résulsant de deux mouvements : 1° un mouvement uniforme suivant la direction OA avec la vitesse v_0 ; 2° un

mouvement uniformément varié suivant la verticale s'effectuant en sens contraire des ordonnées positives et par suite avec l'accélération $-g$.

En vertu du premier mouvement, l'espace parcouru par le mobile sur OA serait, au bout du temps t,

$$(1) \qquad \rho = v_0 t\,;$$

en vertu du second, l'espace parcouru suivant la verticale serait, au bout du même temps,

$$(2) \qquad y_1 = -\frac{1}{2} g t^2.$$

Puisque le mouvement résulte de la composition de ces deux mouvements, la position du mobile au temps t sera définie par les équations simultanées (1) et (2). Ces équations donnent en réalité les coordonnées du mobile rapporté aux axes OA et Oy ; il en résulte que ses coordonnées par rapport aux axes Ox et Oy sont

$$(3) \qquad \begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha, \\ y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

Ces équations définissent la trajectoire et donnent toutes les circonstances du mouvement.

Équation et forme de la trajectoire. — Cherchons d'abord l'équation et la nature de la trajectoire. L'équation s'obtient en éliminant t entre les équations (3), ce qui donne

$$(4) \qquad y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}\,;$$

d'où il suit que la trajectoire est une parabole dont l'axe est vertical et dirigé vers le bas, puisque le coefficient de x^2 est négatif.

Vitesse en un point. — Étudions maintenant la loi des vitesses. Les composantes de la vitesse à un instant donné t sont, en vertu des équations (3),

$$(5) \qquad v_x = v_0 \cos\alpha,$$

$$(6) \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - g t,$$

v_x et v_y désignant les composantes respectives suivant Ox et Oy. Il résulte de ces équations que la vitesse horizontale est constante et que la vitesse verticale diminue quand le temps augmente. Cette dernière composante est nulle lorsque $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, et alors la vitesse se réduit à sa composante horizontale, c'est-à-dire que la tangente à la trajectoire est horizontale. La position correspondante du mobile s'obtient en remplaçant t par $\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ dans les équations (3), ce qui donne

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \\ y &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \end{aligned} \right.$$

Ces équations définissent évidemment le sommet B de la parabole décrite par le point matériel ; elles montrent en particulier que l'élévation y du sommet au-dessus du plan horizontal est égale à la hauteur qu'atteint un mobile lancé verticalement suivant Oy avec la vitesse initiale $v_0 \sin \alpha$ (126).

Revenant maintenant aux équations (5) et (6), on voit que v_y prend des valeurs égales et de signes contraires pour les valeurs de t équidistantes de $\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$; comme la composante horizontale de la vitesse est constante, aux points correspondants de la trajectoire les tangentes sont également inclinées sur l'axe des x. Ces points sont symétriques par rapport à l'axe de la parabole; car, en vertu de la deuxième équation (3), y prend des valeurs égales quand on donne à t des valeurs équidistantes de $\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$.

Enfin le carré de la valeur numérique de la vitesse s'obtient en faisant la somme des carrés des équations (5) et (6),

ce qui donne

$$v^2 = v_0^2 - 2v_0gt \sin \alpha + g^2t^2,$$

c'est-à-dire, en comparant avec la valeur de y fournie par les équations (3),

$$v^2 = v_0^2 - 2gy.$$

Il en résulte que la vitesse est minimum lorsque y est maximum, c'est-à-dire quand le point est au sommet de la parabole ; la valeur minimum d'ailleurs déjà obtenue est $v_0 \cos \alpha$. Ainsi, quand le mobile se déplace depuis le point O jusqu'au sommet B, la vitesse décroît depuis v_0 jusqu'à $v_0 \cos \alpha$; elle croît ensuite et croîtrait indéfiniment si le mobile n'était pas arrêté par le sol.

Amplitude du jet. — On appelle ainsi l'abscisse du point C où le projectile frappe le sol ; on l'obtient en faisant $y = 0$ dans l'équation de la parabole, ce qui donne

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

On voit, ce qui était du reste évident *a priori*, qu'elle est double de l'abscisse du sommet. Quand le mobile arrive en C, sa vitesse est égale à la vitesse initiale v_0.

L'amplitude du jet est proportionnelle au carré de la vitesse et dépend en outre de l'angle α. Pour une même vitesse initiale elle est maximum lorsque $\sin 2\alpha = 1$, c'est-à-dire lorsque $\alpha = 45°$; elle est alors égale à $\dfrac{v_0^2}{g}$.

Enfin, elle reste évidemment la même quand on donne à α des valeurs complémentaires.

Direction suivant laquelle il faut lancer le projectile pour atteindre un point donné. — Soient a et b les coordonnées du point donné ; elles doivent vérifier l'équation (4), et par suite les valeurs de α qui définissent la direction cherchée sont fournies par l'équation

$$b = a \operatorname{tg} \alpha - \frac{ga^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

qu'on ramène immédiatement à l'équation du second degré en tg α

$$(8) \qquad ga^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2av^2 \operatorname{tg} \alpha + ga^2 + 2bv_0^2 = 0.$$

Parabole de sûreté. — Pour que les racines de cette équation soient réelles, il faut que la condition

$$v_0^4 - g[ga^2 + 2bv_0^2] > 0$$

soit remplie ; or, si l'on y regarde a et b comme des coordonnées courantes, le premier membre de cette inégalité égalé à zéro représente une parabole dont le sommet situé sur l'axe des y a pour ordonnée $\frac{v_0^2}{2g}$, dont le foyer est l'origine et dont par suite le paramètre est $\frac{v^0}{g}\cdot$ L'inégalité signifie alors que le point donné doit être situé à l'intérieur de la parabole représentée par l'équation

$$v^4 - g(gx^2 + 2v_0^0 y) = 0.$$

Cette parabole est appelée *parabole de sûreté.*

Elle est évidemment l'enveloppe des trajectoires quand on fait varier l'angle α, en laissant la vitesse initiale constante, et quand le point est sur la parabole de sûreté l'équation (8) a ses racines égales, de sorte qu'il y a une seule trajectoire passant par le point donné $(a \,.\, b)$. Il y en a deux quand ce point est à l'intérieur de la parabole de sûreté, et il n'y en a aucune dans le cas contraire.

Lorsque le point est à l'intérieur de la parabole de sûreté, chacune des deux trajectoires qui passent par ce point peut le rencontrer soit en montant soit en descendant. Pour distinguer ces deux cas l'un de l'autre, il suffit de comparer l'abscisse a du point donné à celle du sommet de la trajectoire, qui est donnée par la première équation (7).

Soit a' l'abscisse du sommet ; si l'on a $a' < a$, la rencontre a lieu en descendant ; dans le cas contraire, la rencontre a lieu en montant.

CHAPITRE III

PROPORTIONNALITÉ DES FORCES ET DES ACCÉLÉRATIONS ; MASSE

128. **Théorème.** — *Le rapport de deux forces constantes est égal au rapport des accélérations qu'elles produisent séparément sur un même point matériel partant du repos ou animé d'une vitesse initiale dans la direction de la force.*

Soient en effet F et F' deux forces constantes, γ et γ' les accélérations des mouvements rectilignes et uniformément variés qu'elles communiquent séparément à un même point matériel partant du repos. Supposons d'abord que les deux forces aient une commune mesure f et soit

$$F = nf, \qquad F' = n'f,$$

de sorte que

$$\frac{F}{F'} = \frac{n}{n'}.$$

La force f agissant seule sur le point matériel partant du repos lui communique une certaine accélération φ ; supposons alors que l'on fasse agir simultanément n forces égales à f dans la même direction, qui sera la direction de la vitesse initiale si le point est animé d'une vitesse initiale; en vertu d'une remarque faite numéro 115, le mouvement du point sous l'action simultanée de toutes ces forces s'obtient en composant les mouvements produits par chacune d'elles individuellement et, comme toutes les forces agissent dans la même direction, l'accélération du mouvement

résultant est égale à la somme des accélérations des mouvements composants, c'est-à-dire à $n\varphi$. On a donc

$$\gamma = n\varphi,$$

et l'on prouverait de même que l'on a

$$\gamma' = n'\varphi\,;$$

on tire de là

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{n}{n'},$$

et par suite

$$\frac{F}{F'} = \frac{\gamma}{\gamma'}. \tag{1}$$

Supposons maintenant que les deux forces n'aient pas de commune mesure et soit f une force contenue un nombre exact de fois dans F'; supposons que cette force f soit contenue m fois dans F mais n'y soit pas contenue $m+1$ fois, de sorte que si elle est contenue p fois dans F', $\frac{m}{p}$ et $\frac{m+1}{p}$ seront les valeurs approchées du rapport $\frac{F}{F'}$ à $\frac{1}{p}$ près par défaut et par excès.

D'après ce qui a été dit plus haut, si l'on appelle φ l'accélération du mouvement que prendrait le point matériel partant du repos et soumis seulement à l'action de la force f, on a

$$\gamma' = p\varphi\,;$$

d'autre part, en vertu aussi de ce qui a été dit plus haut, et puisque la force F est plus grande que m forces f mais plus petite que $m+1$ de ces forces, on a aussi

$$m\varphi < \gamma < (m+1)\varphi.$$

Il suit de là que $\frac{m}{p}$ et $\frac{m+1}{p}$ sont aussi les valeurs approchées du rapport $\frac{\gamma}{\gamma'}$ à $\frac{1}{p}$ près par défaut et par excès. Le raisonnement étant indépendant de la valeur du

nombre p, on voit que les deux nombres $\frac{F}{F'}$ et $\frac{\gamma}{\gamma'}$ ont toujours les mêmes valeurs approchées à $\frac{1}{p}$ près, donc ils sont égaux par définition et l'on a

$$\frac{F}{F'} = \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

129. Remarques. — 1° Le poids P d'un point matériel lui imprime une accélération g ; si donc F est une force constante et γ l'accélération qu'elle imprime au même point partant du repos, on a

$$\frac{F}{P} = \frac{\gamma}{g},$$

d'où l'on tire

$$\gamma = g\frac{F}{P}. \tag{2}$$

Si l'on considère une même force F agissant sur divers points matériels, g étant constant pour le même lieu, P est la seule variable du second membre de la formule (2) ; cette formule montre alors que *l'accélération produite par une force est inversement proportionnelle au poids du point matériel auquel elle est appliquée.*

2° Si dans l'égalité (1) les deux membres ne représentent pas seulement des rapports mais des quotients dont les termes sont les mesures des forces et des accélérations, on peut changer les moyens de place et l'on a

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{F'}{\gamma'};$$

d'où il suit que *si différentes forces agissent sur un même point matériel, le rapport de chaque force à l'accélération correspondante est constant.*

130. **Définition de la masse.** — On appelle *masse* d'un point matériel le rapport constant des mesures d'une force

constante et de l'accélération qu'elle produit sur ce point. Il résulte en effet de la remarque précédente que si plusieurs forces constantes F, F', F'',.... produisent sur le même point matériel les accélérations respectives γ, γ', γ'', on a

$$(3) \qquad \frac{F}{\gamma} = \frac{F'}{\gamma'} = \frac{F''}{\gamma''} = \cdot \cdot$$

La valeur commune, m, de ces rapports est la *masse* du point matériel. Si d'ailleurs la masse du point matériel et l'accélération que lui imprime la force F sont connues on a

$$(4) \qquad F = m\gamma,$$

en vertu même de la définition de m.

131. **Unité de masse.** — L'unité de masse résulte de la définition même de la masse, dès qu'on a choisi les unités de longueur, de temps et de force. Si en effet dans l'équation (4) on fait $m = 1$, on a $F = \gamma$; dès lors *l'unité de masse est celle pour laquelle la force a même mesure que l'accélération.*

On a en particulier pour l'unité de masse

$$P = g,$$

P désignant le poids du point matériel de masse 1 ; donc si l'on a pris pour unité de force le poids d'un décimètre cube d'eau distillée à 4°,1 et à la latitude de Paris, l'unité de masse est celle dont le poids à Paris est

$$g = 9^{kg},8088$$

ou la masse de 9,8088 litres d'eau distillée, etc.

132. Remarque. — Il y a une remarque essentielle à faire, à ce sujet. Par définition, la masse d'un point matériel dépend de la force et de l'accélération ; celle-ci dépend à son tour du temps et de l'espace parcouru, de sorte que la masse dépend à la fois de l'unité de force, de l'unité de longueur et de l'unité de temps.

Les égalités (3) supposent toutes les forces évaluées avec

la même unité de force et toutes les accélérations avec les mêmes unités de longueur et de temps ; le nombre obtenu pour la masse m et l'unité de masse elle-même dépendent de ces unités.

Ainsi, supposons qu'une force de 3^{kg} produise une accélération de 2 mètres par seconde ; les unités étant le kilogramme, le mètre et la seconde, la masse est égale à $\frac{3}{2} = 1{,}5$. Mais supposons maintenant que l'on prenne pour unités, le gramme, le centimètre et la minute ; comme la force de 3^{kg} ou de 3000^{gr} produirait l'accélération de 200 centimètres par seconde, elle produirait l'accélération 200×60^{cm} par minute, et la masse avec les nouvelles unités serait

$$\frac{3000}{200 \times 60} = \frac{1}{4}.$$

Pour savoir quelle est l'unité de masse dans ce système, je reprends la formule $P = g$. L'accélération due à la pesanteur est le double de l'espace parcouru pendant l'unité de temps, c'est-à-dire pendant 60 secondes ; cet espace est égal à

$$9{,}8088 \times 100 \times 60^2$$

centimètres, et l'unité de masse est celle qui pèse à Paris, dans le vide,

$$9{,}8088 \times 100 \times 60^2$$

grammes, c'est-à-dire la masse de

$$9{,}8088 \times 100 \times 60^2$$

centimètres cubes d'eau distillée à $4^o{,}1$, ou enfin la masse d'un nombre de litres exprimé par

$$\frac{9{,}8088 \times 100 \times 60^2}{1000} = 3531^{lit}{,}168.$$

133. Unités absolues ; système C. G. S. — Il y a inconvénient à faire dériver l'unité de masse de l'unité de force

comme nous l'avons fait plus haut. En effet, ainsi que Gauss l'a remarqué le premier, si l'on prend le kilogramme pour unité de force, le poids de cette unité n'est pas le même en tous les points de la terre ; à l'équateur par exemple il est plus faible qu'au pôle. Sur les plateaux d'une balance, deux poids d'un kilogramme se font équilibre en n'importe quel lieu de la terre, et par suite l'évaluation du poids des corps au moyen des poids marqués ne sera pas changée, mais l'effet du même poids sur un dynamomètre ne sera pas le même d'un lieu à un autre. Il suit de là que si l'on voulait, de cette manière, rapporter les forces à une unité invariable, il faudrait un poids-étalon pour chaque lieu.

Pour éviter cet inconvénient, au lieu de faire dériver l'unité de masse de l'unité de force, on fait l'inverse. A cet effet, on observe que la masse d'un corps est la même en tous les points de la terre ; car, si l'on appelle g et g' les accélérations imprimées par la pesanteur au même corps et en deux lieux différents où le corps pèse P et P', on a

$$\frac{P}{g} = \frac{P'}{g'} = m .$$

Un poids-étalon étant alors fixé en un lieu déterminé à la surface de la terre, on pourra prendre la masse de ce corps comme unité de masse ; l'unité de force s'en déduira par la formule

$$p = mg,$$

et sera égale à la force qui communique l'unité d'accélération à l'unité de masse.

Il est bon d'entrer ici dans quelques détails relativement au choix des unités dans la mesure des grandeurs. L'évaluation d'une grandeur quelconque se fait au moyen d'une autre grandeur de même espèce qu'on appelle *unité*. Parmi les grandeurs que l'on a à mesurer, il y en a dont on peut faire dériver la mesure de celle d'autres grandeurs d'espèce

différente : telles sont par exemple les aires et les volumes en géométrie, dont la mesure dérive de celle des longueurs. Pour cette raison, les aires et les volumes sont appelés des *grandeurs dérivées*, tandis que les longueurs sont appelées *grandeurs fondamentales*.

En mécanique on rencontre trois grandeurs fondamentales, qui sont : les longueurs, les temps et les masses ; toutes les autres grandeurs, forces, vitesses, accélérations, etc., peuvent être considérées comme dérivées de celles-là. La mesure des grandeurs que l'on rencontre en mécanique dépend donc du choix de trois unités fondamentales : unité de longueur, unité de temps et unité de masse. Fixer ces unités au moyen d'éléments naturels et autant que possible invariables, c'est faire choix d'un système d'unités absolues.

Le système d'unités absolues universellement adopté maintenant est le système C. G. S. (centimètre-gramme-seconde).

Dans ce système :

1° L'*unité de longueur* est le *centimètre,* c'est-à-dire, la centième partie du mètre-étalon déposé aux Archives nationales et qui est à peu près égal à la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre ;

2° L'*unité de temps* est la *seconde* sexagésimale de temps solaire moyen ; elle dépend à la fois du mouvement de la terre sur elle-même et de son mouvement de translation autour du soleil ;

3° L'*unité de masse* est le *gramme-masse,* c'est-à-dire la masse d'un centimètre cube d'eau distillée à 4°,1 et dont le poids à Paris, dans le vide, est à peu près la millième partie du kilogramme-étalon déposé aux Archives.

En vertu de ce qui a été dit plus haut, la force doit être considérée comme une grandeur dérivée, et nous avons appelé unité de force celle qui communique l'unité d'accélération à l'unité de masse. L'unité de force s'appelle la *dyne*.

Cherchons à exprimer en *dynes* le poids à Paris de l'unité de masse. A cause du choix de l'unité de longueur, l'accélération due à la pesanteur à Paris est 980,86 ; la force sera donc égale 980,86 dynes, de sorte que la dyne est à peu près la millième partie du gramme-masse.

134. Remarque. — L'adoption de ces unités fondamentales entraîne l'usage fréquent et fastidieux de nombres très grands et très petits. Pour obvier à cet inconvénient, on transporte la virgule dans chaque nombre immédiatement après le premier chiffre significatif, en ayant soin de multiplier par une puissance positive ou négative de 10, convenablement choisie. Par exemple, si une force vaut 3.540.000 dynes, on écrira : $10^6.3,54$; si elle vaut 0,43800 dynes, on écrira : $4.38.10^{-3}$, etc.

CHAPITRE IV

VALEUR D'UNE FORCE; DÉFINITION DE LA RÉSULTANTE; COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES

135. **Théorème** — *Une force constante ou variable agissant sur un point matériel est égale au produit de la masse de ce point par l'accélération qu'elle lui imprime.*

Supposons d'abord une force constante F agissant sur un point matériel de masse m et lui imprimant une accélération γ; d'après la définition même de la masse, on a

$$\frac{F}{\gamma} = m, \qquad \text{d'où} \qquad F = m\gamma.$$

Considérons maintenant une force, variable avec le temps, agissant sur un point matériel de masse m. Si l'on appelle v et $v + \Delta v$ les vitesses de ce point aux instants t et $t + \Delta t$, l'accélération moyenne pendant l'intervalle de temps Δt a pour expression $\frac{\Delta v}{\Delta t}$; mais si Δt est très petit, on peut considérer la force comme constante dans cet intervalle, de sorte que sa valeur, en vertu du premier cas, est $m\frac{\Delta v}{\Delta t}\cdot$ Il en résulte que si Δt tend vers zéro, la valeur de la force à l'instant t est égale à la limite du produit $m\frac{\Delta v}{\Delta t}$; or, si l'on appelle F_t et γ_t les valeurs respectives de

la force et de l'accélération à l'instant t, on a

$$\lim m \frac{\Delta v}{\Delta t} = m\gamma_t,$$

et par suite

$$F_t = m\gamma_t,$$

ce qui démontre la proposition.

136. **Théorème.** — *Lorsqu'un point matériel de masse* m *est en mouvement sous l'action d'une force quelconque* F, *le vecteur qui représente la force, et dont l'origine est la position correspondante du point matériel, est égal, à chaque instant, au produit par* m *du vecteur qui représente l'accélération totale.*

Ce théorème, fondamental dans l'étude de la dynamique, est une conséquence immédiate des propositions numéros 117 et 135.

Soient, en effet, F_t et γ_t les vecteurs qui représentent la force et l'accélération au temps t. En vertu de la proposition démontrée numéro 117, les deux vecteurs ont la même direction ; en vertu du théorème précédent, la grandeur du vecteur F_t est égale au produit par m de la grandeur du vecteur γ_t ; la proposition est alors évidente.

137. Remarque. — Il suit de là que l'égalité

$$F_t = m\gamma_t$$

n'est pas seulement une égalité numérique et qu'on peut la considérer comme une égalité vectorielle entre les vecteurs qui représentent la force et l'accélération multipliée par la masse.

138. **Définition de la résultante de plusieurs forces.** — Soient, à un instant donné t, F_1, F_2,... F_n plusieurs forces constantes ou variables, et soit M un point matériel de masse

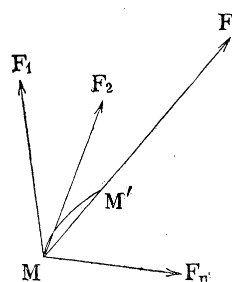


Fig. 45

m et que nous supposerons au repos. Imaginons que toutes ces forces soient appliquées au point M pendant le temps infiniment petit dt ; elles lui communiqueront un certain déplacement MM' (*fig.* 45). On conçoit qu'il soit possible d'obtenir le même déplacement en faisant agir sur le point M et pendant le même temps une force F convenablement choisie en grandeur et direction : cette force F s'appelle la *résultante* à l'instant t du système des forces $F_1, F_2, \ldots F_n$. Si d'ailleurs le déplacement MM' est rigoureusement nul, la résultante est nulle elle-même et les forces sont en équilibre. Quoi qu'il en soit, la définition de la résultante se ramène à celle-ci :

La résultante d'un système de forces considérées à un instant donné est la force unique qui peut les remplacer toutes à cet instant.

Dans cette définition, nous omettons volontairement une condition qui semblerait devoir y rentrer, en vertu des considérations qui nous ont conduits à la définition de la résultante. Nous avons supposé en effet que les forces agissent sur un point partant du repos ; mais il est aisé de voir que si une force F peut remplacer l'ensemble des forces $F_1, F_2, \ldots F_n$ agissant sur le même point M partant du repos, elle peut également remplacer cet ensemble de forces quand le point M est en mouvement. Nous remarquerons pour cela que, si le point M est en mouvement, on peut le considérer comme faisant partie d'un système invariable animé du même mouvement que lui, c'est-à-dire par suite d'un mouvement de translation. Si alors, à l'instant t, on fait agir les forces $F_1, F_2, \ldots F_n$, le mouvement relatif qu'elles impriment au point M dans le système est le même

que si le système était au repos; dès lors ce mouvement relatif ne sera pas altéré si l'on remplace $F_1, F_2, \ldots F_n$ par F. Mais le mouvement absolu s'obtient en comparant le mouvement d'entraînement avec le mouvement relatif; la force F n'a évidemment aucune influence sur le mouvement d'entraînement; quant au mouvement relatif, nous venons de dire qu'il n'est pas altéré si l'on substitue la force F au système des forces $F_1, F_2, \ldots F_n$; donc le mouvement absolu lui-même n'est pas altéré quand on opère la même substitution. En particulier, si les forces $F_1, F_2, \ldots F_n$ se font équilibre quand le point M est au repos, elles se feront équilibre quand le point M sera en mouvement, c'est-à-dire que le mouvement du point M n'est pas altéré par l'introduction de ces forces.

139. Remarque. — Lorsqu'une force F est la résultante de plusieurs autres, $F_1, F_2, \ldots F_n$, la force F', égale et directement opposée à F, fait équilibre à celle-ci et par suite aux forces $F_1, F_2, \ldots F_n$. Si en particulier $F_1, F_2, \ldots F_n$ agissent dans la même direction et dans le même sens, la force F' est, par définition, égale à leur somme ; donc *la résultante de plusieurs forces appliquées au même point matériel, dans la même direction et dans le même sens, est égale à leur somme et agit dans le même sens qu'elles.*

140. **Théorème.** — *Lorsque plusieurs forces agissent sur le même point matériel* M *en repos ou en mouvement, le vecteur qui représente la résultante est la somme géométrique des vecteurs qui représentent les forces.*

Démontrons d'abord la proposition dans le cas où le point M est au repos. Pour cela, rappelons que si un point de masse m est en mouvement sous l'action d'une force φ, en appelant j le vecteur qui représente l'accélération totale à un instant donné, on a l'égalité vectorielle

$$\varphi = mj.$$

Rappelons aussi que si plusieurs forces $F_1, F_2, \ldots F_n$ agissent sur le même point matériel, le mouvement qu'elles lui impriment (mouvement relatif si M est déjà en mouvement, mouvement absolu dans le cas contraire) s'obtient en composant les mouvements que produiraient les forces F_1, $F_2, \ldots$ si elles agissaient séparément sur le point partant du repos.

Cela posé, appelons $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ les accélérations des mouvements respectifs imprimés au point M partant du repos par les forces $F_1, F_2, \ldots F_n$; on aura l'égalité vectorielle

$$F_i = m\gamma_i$$

pour toutes les valeurs $1, 2, \ldots n$ données à i. D'autre part, soit γ l'accélération du mouvement imprimé par la force F agissant toute seule dans les mêmes conditions ; comme ce mouvement est le mouvement résultant, le vecteur γ, d'après ce qui a été rappelé plus haut, est la somme géométrique des vecteurs $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$. Mais alors le vecteur $m\gamma$ sera la somme géométrique des vecteurs $m\gamma_1, m\gamma_2, \ldots m\gamma_n$, ce qui revient à dire que le vecteur qui représente F est la somme géométrique des vecteurs qui représentent $F_1, F_2, \ldots F_n$.

Le cas où le point M est en mouvement se ramène au cas précédent à l'aide du principe des mouvements relatifs. Il suffit en effet de supposer que le point M fasse partie d'un système invariable de points matériels animés du même mouvement que lui, c'est-à-dire par suite d'un mouvement commun de translation. Si alors on applique à ce point les forces $F_1, F_2, \ldots F_n$, elles lui communiquent, dans le système, un mouvement relatif qui est le même que si le point partait du repos, et l'on est ainsi ramené au cas déjà examiné. On voit donc, en résumé, que si plusieurs forces constantes ou variables agissent sur un point animé d'un mouvement quelconque, la résultante de toutes ces forces est, à chaque instant, égale à leur somme géométrique.

141. Composition et décomposition des forces. — *Compo-*

ser plusieurs forces, c'est trouver leur résultante; les forces s'appellent alors les *composantes*.

Décomposer une force en plusieurs autres satisfaisant à des conditions données, c'est construire un système de forces satisfaisant à ces conditions et dont la résultante soit la force donnée. Le théorème précédent, qui est fondamental dans l'étude des forces, nous montre que la composition et la décomposition des forces sont des opérations équivalentes à la composition et à la décomposition des vecteurs. Les règles sont les mêmes, et nous nous bornerons à y renvoyer le lecteur.

Observons seulement que si un point matériel libre est soumis à l'action de plusieurs forces, et si X, Y, Z sont les composantes de l'une quelconque de ces forces suivant trois axes de coordonnées, pour que le point soit en équilibre il faut et il suffit que l'on ait :

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = 0;$$

car il faut et il suffit que le vecteur qui représente la résultante soit nul.

142. Force tangentielle et force centripète. — Dans la décomposition des vecteurs, nous avons vu que tout vecteur peut être considéré comme la résultante de deux autres dont on donne les directions, situées dans le même plan avec celle du premier. Pareillement, une force peut être décomposée en deux autres, de directions données, situées dans le même plan avec la direction de la force donnée. Considérons d'après cela un point matériel en mouvement sous l'action d'une force quelconque F; on a vu que si γ est le vecteur qui représente l'accélération totale, on a l'égalité vectorielle

$$F = m\gamma,$$

de sorte que la force est, comme l'accélération totale, située dans le plan osculateur à la trajectoire du point matériel. On peut, par suite, la considérer comme la résultante de

deux autres forces, dirigées respectivement suivant la tangente et suivant la normale principale menées à la trajectoire par le point qui coïncide avec le point matériel à l'instant où on le considère. La première de ces deux composantes s'appelle la *composante tangentielle de la force* F ou encore la *force tangentielle* ; la deuxième s'appelle *composante centripète de la force* F ou *force centripète*. D'ailleurs si l'on appelle F_t et F_c ces deux forces respectives, on a évidemment

$$F_t = m\gamma_t,$$
$$F_c = m\gamma_n,$$

γ_t et γ_n désignant les composantes tangentielle et normale de l'accélération; en remplaçant γ_t et γ_n par leurs valeurs trouvées en cinématique (64), on a

$$F_t = m\frac{dv}{dt},$$

$$F_c = m\frac{v^2}{\rho}.$$

CHAPITRE V

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SOUMIS A DES FORCES CONNUES; APPLICATIONS

143. Nous avons étudié, dans le chapitre précédent, les relations qui existent entre les forces qui agissent sur un point matériel et le mouvement qu'elles impriment à ce point ; nous allons montrer, à présent, comment on peut utiliser ces relations pour l'étude du mouvement.

Nous rapporterons pour cela le mouvement à un système de coordonnées rectangulaires, et nous appellerons x, y, z les coordonnées, fonctions du temps, du point matériel dans l'une quelconque des positions qu'il occupe quand il se meut sous l'action de plusieurs forces F_1, F_2,... F_n. Nous avons montré que la résultante de ces forces est à chaque instant égale à leur somme géométrique; par conséquent, si l'on projette obliquement ou orthogonalement sur un axe quelconque, la projection de la résultante est égale à la somme algébrique des projections des composantes. D'autre part, si l'on appelle m la masse du point et γ le vecteur qui représente l'accélération totale, le vecteur qui représente la résultante est $m\gamma$, de sorte que si l'on projette sur un axe quelconque, la projection de la résultante est égale au produit par m de la projection du vecteur γ. D'après cela, les projections de la résultante sur les trois axes des coordonnées sont respectivement

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad m\,\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad m\,\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Si donc on désigne d'une manière générale par $(F_i)_\alpha$ la projection de la force F_i sur un axe $O\alpha$, on aura les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \Sigma(F_i)_x, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \Sigma(F_i)_y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \Sigma(F_i)_z, \end{aligned}\right.$$

dans chacune desquelles il faut donner à i toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n. En appelant X, Y, Z les seconds membres respectifs de ces équations, c'est-à-dire les composantes de la résultante suivant les axes, on peut encore écrire ces équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z. \end{aligned}\right.$$

C'est à l'aide de ces équations que l'on parvient à résoudre les deux problèmes principaux qui se présentent en dynamique : 1° *un mouvement étant observé, trouver la force qui le produit ;* 2° *étant donné la force ou les forces qui agissent sur un mobile ainsi que l'état initial de ce mobile, c'est-à-dire sa position initiale et sa vitesse initiale, trouver le mouvement.*

La détermination de la force connaissant le mouvement résulte immédiatement des équations (2), car si l'on connaît le mouvement on connaît les premiers membres de ces équations, et par suite on en déduit les composantes de la force. En général on a plutôt à résoudre le second problème : *connaissant la force, trouver le mouvement.* Le cas le plus

général est celui où la force est une fonction connue du temps, des coordonnées du point et des composantes de la vitesse ; de sorte que la forme la plus générale des équations (1) est

$$(3)\quad \begin{cases} m\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, y, z, t, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right), \\ m\,\dfrac{d^2y}{dt^2} = \varphi\left(x, y, z, t, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right), \\ m\,\dfrac{d^2z}{dt^2} = \psi\left(x, y, z, t, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right), \end{cases}$$

et si l'on appelle x_0, y_0, z_0 les coordonnées initiales du mobile, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$ les composantes de la vitesse initiale, c'est-à-dire les valeurs de ces quantités pour $t = 0$, la détermination du mouvement revient à trouver trois fonctions x, y, z de t satisfaisant aux équations (3) et vérifiant les conditions

$$x = x_0 \qquad \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0,$$

$$y = y_0 \qquad \frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_0,$$

$$z = z_0 \qquad \left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right),$$

pour $t = 0$. Nous traiterons plus loin ce problème dans quelques cas simples.

144. Remarque. — Au lieu de projeter les forces et le mouvement sur trois axes rectangulaires, on peut les projeter sur la tangente et sur la normale principale à la trajectoire. En appelant F la force unique par laquelle on peut remplacer toutes les autres, et α l'angle qu'elle fait avec la tangente, on a ainsi les deux équations

$$m\frac{dv}{dt} = \mathrm{F}\cos\alpha,$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = \mathrm{F}\sin\alpha.$$

Pour obtenir la composante tangentielle $\mathrm{F}\cos\alpha$ et la composante normale $\mathrm{F}\sin\alpha$, on peut du reste procéder de deux manières : ou bien projeter toutes les forces sur la tangente et sur la normale principale, ou bien décomposer chaque force en deux autres dirigées l'une suivant la tangente et l'autre suivant une normale. La somme des composantes tangentielles est $m\frac{dv}{dt}$ et la résultante des composantes normales est $\frac{mv^2}{\rho}$.

Cela posé, nous allons faire quelques applications.

145. **Problème I.** — *Mouvement vertical ascendant d'un point matériel pesant dans le vide.*

Prenons pour axe des x la verticale passant par la position initiale du mobile et dirigée vers le haut ; puisque le mouvement s'effectue dans le sens des abscisses négatives, son équation est

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg,$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g. \tag{4}$$

Supposons que l'on compte les temps à partir de l'instant où le mobile se met en mouvement, et soit v_0 la vitesse initiale. On déduit immédiatement de l'équation (4)

$$\frac{dx}{dt} \quad \text{ou} \quad v = -gt + v_0,$$

et ensuite

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + \mathrm{C}.$$

Si d'ailleurs on compte x à partir du point de départ du mobile, la constante C doit être nulle et il vient

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Nous retrouvons ainsi l'équation du mouvement uniformément retardé, et le problème est ramené à un autre déjà résolu (126).

146. **Problème II.** — *Étudier le mouvement d'un point matériel de masse* m *attiré ou repoussé par un centre fixe proportionnellement à la distance, et en supposant que la vitesse initiale soit dirigée vers le point fixe.*

La trajectoire est évidemment une ligne droite et nous la prendrons pour axe des x. Nous distinguerons d'ailleurs deux cas, suivant que la force est attractive ou répulsive.

1er Cas. *Force attractive.* — Soient O (fig. 46) le point fixe, M_0 la position initiale du mobile et v_0 la vitesse initiale. Le signe de la force est évidemment contraire à celui de l'abscisse ; l'équation du mouvement est donc

$$(5) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x,$$

μ désignant un coefficient de proportionnalité dont la valeur est supposée connue et positive ; nous poserons $\frac{\mu}{m} = k^2$, de sorte que l'équation (5) s'écrira

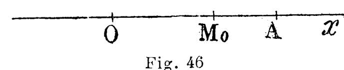


Fig. 46

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x.$$

En multipliant les deux membres par $2\frac{dx}{dt}$, le premier membre devient la dérivée de $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$; de même le second

membre devient la dérivée de x^2; on a donc

$$(6) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -k^2x^2 + C.$$

On détermine la valeur de la constante C en exprimant qu'au point M_0 la vitesse est égale à v_0; si donc x_0 est l'abscisse de ce point, on devra avoir

$$v_0^2 = -k^2x_0^2 + C,$$

d'où

$$C = v_0^2 + k^2x_0^2;$$

en portant dans l'équation (6), on obtient ainsi

$$(7) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v_0^2 + k^2(x_0^2 - x^2).$$

On voit alors que la vitesse est nulle si l'on a

$$v_0^2 + k^2(x_0^2 - x^2) = 0,$$

et si l'on appelle a l'abscisse du point situé à droite du point O et pour lequel la vitesse est nulle, on a

$$k^2a^2 = v_0^2 + k^2x_0^2;$$

par suite l'équation (7) prend la forme plus simple

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = k^2(a^2 - x^2),$$

d'où

$$(8) \qquad \frac{dx}{dt} = \pm k\sqrt{a^2 - x^2}.$$

La vitesse n'est réelle que si x est compris entre $-a$ et $+a$.

Pour choisir le signe devant le radical, nous supposerons que l'on compte le temps à partir de l'instant où $x = a$; comme la vitesse est nulle à cet instant et que, de plus, le mobile se déplace de droite à gauche, la vitesse devient négative et l'on doit par conséquent prendre le signe —. Dans ces conditions l'équation (8) donne

$$(9) \qquad kdt = -\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

d'où

$$kt = -\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Or,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc cos}\,\frac{x}{a} + \text{C},$$

et par suite

$$kt = \text{arc cos}\,\frac{x}{a},$$

d'où enfin

$$x = a \cos kt.$$

On voit ainsi que le mouvement que nous étudions est le mouvement vibratoire simple déjà étudié (96).

Remarquons d'ailleurs que si la limite inférieure de l'intégrale n'était pas fixée, on aurait $x = a \cos (kt + \text{C}')$, C' désignant une constante.

2e Cas. *Force répulsive.* — Dans ce cas la force est de même signe que l'abscisse du point et l'équation du mouvement est

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mu x,$$

μ désignant encore un coefficient de proportionnalité, positif.

Posons encore $\frac{\mu}{m} = k^2$ et opérons comme dans le cas précédent ; il vient

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = k^2x^2 + \text{C}.$$

Supposons tout de suite qu'au départ, quand le mobile est en A à droite du point O, la vitesse soit nulle, et soit a la distance OA ; on aura

$$\text{C} = -k^2a^2,$$

et par suite

$$v^2 = k^2(x^2 - a^2).$$

Il suit de là que v n'est réelle que si $x > a$. On déduit

du reste de cette équation

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{x^2 - a^2},$$

équation dans laquelle on a pris le signe $+$ parce que, au début du mouvement, quand le mobile part du point A, la vitesse est positive. On tire de là

$$kt = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

et enfin

$$kt = \mathrm{L}\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right).$$

Il est aisé de déduire de là la formule des espaces. On a en effet

$$(10) \qquad x + \sqrt{x^2 - a^2} = ae^{kt};$$

or, si l'on multiplie de part et d'autre par

$$x - \sqrt{x^2 - a^2},$$

on obtient

$$a^2 = ae^{kt}(x - \sqrt{x^2 - a^2}),$$

et par suite

$$(11) \qquad x - \sqrt{x^2 - a^2} = ae^{-kt}.$$

Les équations (10) et (11) ajoutées membre à membre donnent finalement

$$x = \frac{a}{2}(e^{kt} + e^{-kt}).$$

On voit ainsi que la courbe des espaces (45) est une chaînette.

La vitesse s'obtient en fonction du temps au moyen de la formule

$$v = \frac{ka}{2}(e^{kt} - e^{-kt}).$$

147. **Problème III.** — *Étudier le mouvement d'un point matériel partant du repos et attiré vers un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.*

Soit O (*fig.* 47) le point fixe ; la trajectoire sera encore une droite Ox passant par le point O et par la position initiale du mobile. La force étant attractive, sa direction est celle des abscisses négatives, de sorte que si l'on désigne par m la masse du point, par x son abscisse à un instant quelconque et par μ un coefficient de proportionnalité, l'équation du mouvement est



Fig. 47

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{x^2},$$

ou encore

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x^2},$$

en posant $\frac{\mu}{m} = k$.

En multipliant les deux membres par $2\frac{dx}{dt}$, on déduit de cette équation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2k}{x} + C,$$

c'est-à-dire

$$v^2 = \frac{2k}{x} + C.$$

Or, si A est la position initiale du mobile, pour $x = a$, abscisse du point A, on doit avoir $v = 0$; il en résulte

$$C = -\frac{2k}{a},$$

et par suite, soit

$$v^2 = 2k\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right),$$

soit

$$(12) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2k\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right),$$

formules qui permettent d'étudier la loi de variation de la

vitesse. On voit ainsi que si l'on suppose $a > 0$, la vitesse n'est réelle que si $x < a$, c'est-à-dire si le mobile est compris entre O et A.

Il n'est pas possible ici d'exprimer x en fonction de t, mais on peut faire l'inverse. De l'équation (12) on déduit en effet

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2k}{a}\left(\frac{a}{x} - 1\right)},$$

et, comme au début du mouvement la vitesse est négative, il faut prendre le signe $-$, ce qui donne

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2k}{a}}\sqrt{\frac{a}{x} - 1},$$

ou bien

$$-\sqrt{\frac{2k}{a}}\,dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{a}{x} - 1}},$$

et enfin

$$-\sqrt{\frac{2k}{a}}\,t = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{a}{x} - 1}},$$

le temps étant compté à partir de l'instant où le mobile est en A.

Pour évaluer l'intégrale définie qui figure au second membre, il faut d'abord évaluer l'intégrale indéfinie

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{a}{x} - 1}}.$$

A cet effet, on pose

$$x = a \cos^2 \varphi$$

et il vient

$$dx = -2a \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi,$$

$$\sqrt{\frac{a}{x} - 1} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

ce qui donne finalement

$$\mathrm{I} = -\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) + \mathrm{C}.$$

D'ailleurs pour $x = a$ on peut prendre $\varphi = 0$, c'est-à-dire que l'on a $\varphi = 0$ pour $t = 0$, et il en résulte $\mathrm{C} = 0$.

On exprimera donc le temps au moyen de φ par la formule

$$(13) \qquad \sqrt{\frac{2k}{a}}\, t = a\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right).$$

Sous cette forme l'équation est susceptible d'une interprétation géométrique simple.

Imaginons en effet le cercle décrit sur OA comme diamètre (*fig.* 48) et soient, à un instant donné t, M la position du mobile sur OA, M′ un point du cercle projeté en M. Si l'on appelle φ l'angle AOM, on a évidemment $x = a\cos^2\varphi$; d'autre part l'aire du secteur curviligne AOM′ a pour expression

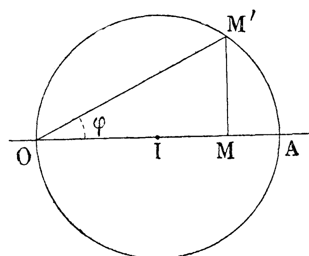


Fig 48

$$\frac{a^2}{4}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right).$$

En comparant avec le second membre de l'équation (13), on voit que cette équation exprime que le point M′ se déplace sur le cercle de manière que l'aire décrite par le rayon vecteur $\overline{\mathrm{OM}'}$ varie proportionnellement au temps. Il en résulte que le mouvement que nous étudions peut être considéré comme le mouvement de la projection sur OA, d'un point M′ mobile sur la demi-circonférence, de manière que les aires décrites par le rayon vecteur OM′ varient proportionnellement au temps.

148. Remarque. — Dans les exemples traités jusqu'ici, les

mouvements étudiés étaient rectilignes ; nous allons donner des exemples de mouvements curvilignes.

149. **Problème IV.** — *Mouvement produit par une force constante en grandeur et direction.*

Prenons pour axe des z la direction de la force et soit m la masse du point matériel ; les équations du mouvement sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{F},$$

F désignant la valeur de la force constante.

Soit v_0 la vitesse initiale que nous supposerons située dans le plan des zx, et soit α l'angle qu'elle fait avec $\mathrm{O}x$; on déduit des équations précédentes

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha,$$

$$\frac{dy}{dt} = 0,$$

$$m\frac{dz}{dt} = \mathrm{F}t + mv_0 \sin \alpha,$$

et enfin

$$x = v_0 t \cos \alpha + \mathrm{C},$$

$$y = \mathrm{C}',$$

$$z = v_0 t \sin \alpha + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{F}}{m} \cdot t^2 + \mathrm{C}''.$$

La constante C′ est nécessairement nulle, puisque l'on suppose que le plan des zx passe par la position initiale du mobile. Quant aux constantes C et C″ leurs valeurs dépendent de cette position initiale ; elles sont nulles elles-

mêmes si l'on suppose que le mobile part de l'origine au temps $t = 0$, et alors les équations du mouvement deviennent

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha, \\ y &= 0, \\ z &= v_0 t \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t^2. \end{aligned} \right.$$

L'élimination du temps entre ces équations conduit à une équation du second degré représentant une parabole.

Donc, lorsqu'un point matériel est soumis à une force constante, la trajectoire qu'il décrit est une parabole.

Ceci résulte d'ailleurs de ce que les équations (14) deviennent identiques à celles du mouvement d'un point matériel pesant dans le vide quand on y fait $F = -mg$. Cette remarque nous dispense d'entrer dans d'autres détails relativement au problème que nous traitons.

150. Remarque. — Nous venons de voir que la trajectoire d'un point matériel en mouvement sous l'action d'une force constante est une parabole. Ce résultat s'étend à un nombre quelconque de forces constantes ; car la résultante de plusieurs forces en grandeur et direction est elle-même une force constante en grandeur et direction; par suite, on peut considérer le mouvement comme produit par une seule force constante.

151. **Problème V.** — *Mouvement d'un point matériel attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance, la vitesse initiale n'étant pas dans la direction de la force.*

Prenons le centre fixe pour origine des coordonnées et appelons :

x, y, z les coordonnées du point à un instant quelconque;

m la masse de ce point ;

r sa distance au centre d'attraction à l'instant où ses coordonnées sont x, y, z.

Les cosinus directeurs de la direction de la force sont évidemment $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$, $-\frac{z}{r}$; les équations du mouvement seront donc

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\frac{x}{r}\cdot r,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu\frac{y}{r}\cdot r,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -\mu\frac{z}{r}\cdot r,$$

et, en posant $\sqrt{\frac{\mu}{m}} = \omega$, elles deviennent

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0.$$

Mais nous avons déjà rencontré (146) une équation de la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k^2 u = 0,$$

et nous en avons tiré

$$u = a\cos(kt + \mathrm{C}),$$

a, k et C étant des constantes arbitraires.

Appliquant ce résultat aux équations précédentes, il vient

$$x = a\cos(\omega t + \alpha),$$

$$y = b\cos(\omega t + \beta),$$

$$z = c\cos(\omega t + \gamma),$$

dans lesquelles a, b, c, α, β, γ sont des constantes que l'on

détermine d'après les données initiales du mouvement. On reconnaît dans ces équations celles qui ont été obtenues numéro 99. Nous pouvons donc en conclure que si un point matériel est en mouvement sous l'action d'une force attractive émanant d'un centre fixe et proportionnelle à la distance :

1° *La trajectoire est une ellipse ayant pour centre le point fixe ;*

2° *Les aires décrites par le rayon qui va du centre de l'ellipse au point mobile sont proportionnelles aux temps employés à les décrire.*

CHAPITRE VI

TRAVAIL ET FORCE VIVE

152. Notion du travail des forces. — Lorsqu'on élève un fardeau, on travaille ; on admet que le travail accompli est proportionnel au poids et à l'élévation du fardeau, par suite proportionnel au produit de ces éléments. Si, pour faciliter le travail, au lieu d'élever verticalement le fardeau, on l'élève à la même hauteur sur un plan incliné, *on admet* que le travail ne change pas. De même dans tous les travaux de manœuvre où des éléments étrangers, intelligence, insalubrité, etc. n'interviennent pas, on paye le travail proportionnellement au produit de la force surmontée par le chemin parcouru dans la direction de cette force.

De là la définition suivante :

153. Définition du travail. — *On appelle travail d'une force constante en grandeur et direction, la valeur algébrique du produit de cette force par la projection, sur sa direction, du déplacement de son point d'application.*

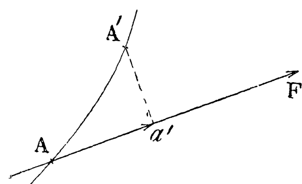


Fig. 49

Soient, d'après cela, AF (*fig.* 49) la force, AA′ le déplacement de son point d'application, et a' la projection de A′ sur la direction de la force ; on aura

$$\text{Travail} \quad F = AF.\,Aa'.$$

Le produit AF. Aa' est d'ailleurs positif ou négatif selon que les vecteurs AF et Aa' sont de même sens ou de sens contraire. Dans le premier cas le travail est dit *moteur ;* il est dit *résistant* dans le second.

154. Exemple. — Considérons un point matériel pesant, de poids P; soient AB (*fig.* 50) la trajectoire, $z'z$ la direction de la pesanteur, que nous prendrons comme direction positive des projections sur la verticale. Si le point matériel descend depuis le point A jusqu'au point B, la projection du chemin parcouru peut être représentée en grandeur et sens par le vecteur ab ; le travail sera donc égal à P × vecteur ab. Ici le vecteur ab est égal à la distance verticale des points A et B ; mais si le mobile, au lieu d'avoir un mouvement descendant, avait un mouvement ascendant, le vecteur ab serait égal à cette même distance précédée du signe — .

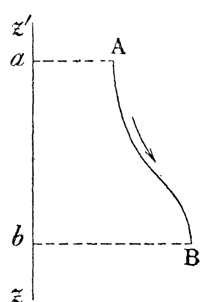


Fig. 50

Ainsi, le travail de la pesanteur est égal au poids multiplié par la distance verticale positive ou négative du point de départ du mobile au point d'arrivée.

155. **Unité de travail**. — D'après cela, si P est le poids d'un point matériel et h la distance verticale positive ou négative du point de départ au point d'arrivée, et si l'on désigne par $\mathcal{T}r$.P le travail du poids P, on a

$$\mathcal{T}r.\, P = P.\, h.$$

Si dans cette formule on fait $P = 1, \quad h = 1,$ il vient

$$\mathcal{T}r.\, P = 1.$$

Si donc on prend pour unité de force le kilogramme et pour unité de longueur le mètre, l'unité de travail est le

travail de la pesanteur dans la chute de 1 mètre du poids de 1 kilogramme, ou, ce qui revient au même, le travail qu'il faut dépenser pour élever de 1 mètre le poids de 1 kilogramme. Ce travail porte le nom de *kilogrammètre*, rappelant les unités, kilogramme et mètre. Par exemple, si $P = 3$ kgs et $h = 4$ m, on a

$$\mathfrak{T}r.\ P = 12 \text{ kilogrammètres.}$$

Dans le système C. G. S. l'unité de travail sera, naturellement, le travail de l'unité de force pour un déplacement égal à l'unité de longueur, c'est-à-dire le travail d'une dyne pour un déplacement de un centimètre. On l'appelle l'*erg*.

156. **Évaluation du kilogrammètre en ergs.** — Comme exercice, proposons-nous d'évaluer le kilogrammètre en ergs. Le poids d'un gramme-masse est 980,86 dynes ou $9{,}8086 \times 10^2$ dynes; le poids du kilogrammètre est donc $9{,}8086 \times 10^5$ dynes. L'unité étant le centimètre, pour avoir la valeur du kilogrammètre en ergs, il faudra multiplier par 100 le poids exprimé en dynes, ce qui donne

$$9{,}8086 \times 10^7 \text{ ergs.}$$

On appelle *megerg* une unité secondaire de travail équivalente à 1 000 000 d'ergs.

On voit donc que le kilogrammètre vaut environ 100 megergs.

157. **Expression algébrique du travail d'une force constante.** — Nous avons vu que si AA′ (*fig.* 49) est le déplacement d'un point matériel sous l'action d'une force AF, on a

$$(1) \qquad \mathfrak{T}r.\ F = AF . Aa',$$

les facteurs qui entrent dans le second membre de cette égalité devant être considérés comme des vecteurs. Si l'on mène le vecteur AA′, on a

$$\text{vect. } Aa' = \text{vect. } AA' \times \cos\left(\widehat{AA'.AF}\right),$$

ou, en convenant une fois pour toutes d'écrire PQ au lieu de vecteur PQ,

$$Aa' = AA'. \cos(\widehat{AA'.AF}).$$

En portant dans l'égalité (1), on obtient

$$(2) \qquad \mathfrak{T}r.\ F = AF.AA'. \cos(\widehat{AA'.AF}),$$

ce qui conduit aux nouvelles définitions suivantes du travail :

1° *On appelle travail d'une force constante en grandeur et direction, le produit de la force par la corde du chemin parcouru et par le cosinus de leur angle ;*

2° *On appelle travail d'une force constante, le produit de la corde du chemin parcouru par la projection de la force sur cette corde.*

Cette seconde définition résulte du reste de ce que l'on peut écrire l'égalité (2) sous la forme

$$\mathfrak{T}r.\ F = AA'.AF. \cos(\widehat{AF.AA'}).$$

158. Remarques. — 1° Si l'on appelle D le vecteur AA′ et F le vecteur qui représente la force, on voit que le travail de la force F pour le déplacement D n'est autre chose que le produit géométrique des deux vecteurs D et F ; on a donc

$$\mathfrak{T}r.\ F = \varpi(D.F).$$

2° Le travail est nul soit lorsque la force est nulle, soit lorsque sa direction est normale au déplacement.

159. **Extension aux forces variables de la notion du travail ; travail élémentaire.** — Il est aisé maintenant d'étendre aux forces variables la notion du travail. Imaginons en effet que le chemin parcouru ait été décomposé en éléments infiniment petits. On peut admettre que pendant que le point d'application de la force parcourt l'un quelconque de ces éléments, la force demeure constante. Soit F la valeur constante de la force et soit dS le déplacement infiniment petit

du point d'application exprimé en grandeur, direction et sens ; on aura, pour ce déplacement,

$$\mathcal{T}r.\ F = F.dS.\ \cos\left(\widehat{F.dS}\right).$$

On appelle ce travail le *travail élémentaire* de la force F pour le déplacement dS.

L'expression du travail élémentaire peut être écrite sous l'une quelconque des deux formes

$$F.dS.\ \cos\left(\widehat{F.dS}\right),$$
$$dS.F.\ \cos\left(\widehat{F.dS}\right),$$

qui conduisent à appeler travail élémentaire pour un déplacement infiniment petit dS, *soit le produit de la force par la projection du déplacement sur la direction de cette force, soit le produit du déplacement par la projection de la force sur la direction du déplacement.*

160. Remarque. — D'après cela, le travail élémentaire est nul :

1° Si la force est nulle ;

2° Si le déplacement est nul ou normal à la direction de la force.

161. **Travail total.** — On appelle *travail total* d'une force variable, quand son point d'application parcourt un arc S_0S_1 (*fig.* 51), la somme algébrique des travaux élémentaires correspondant aux divers éléments infiniment petits en lesquels l'arc a été partagé.

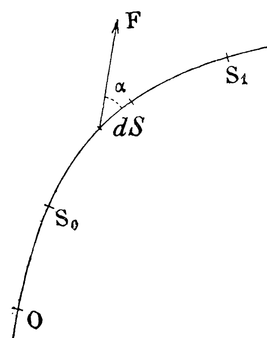


Fig. 51

D'après cela, si l'on appelle F la force quand son point d'application parcourt un élément dS, α l'angle de la direction de la force avec la direction du déplacement, et enfin s_0 et s_1 les arcs de trajectoire comp-

tés à partir d'une origine fixe, l'expression du travail total sera

$$\int_{s_0}^{s_1} F \cos \alpha . dS.$$

Il ne faut d'ailleurs pas perdre de vue que dans cette intégrale définie F, α et S sont des fonctions du temps.

162. **Cas particuliers.** — 1° Appelons $\mathfrak{T}r.$ le travail total, et supposons d'abord que la force F soit constante en grandeur et direction ; on aura

$$\mathfrak{T}r. = F \int_{s_0}^{s_1} \cos \alpha . dS.$$

Or, $\cos \alpha . dS$ représente la projection de l'élément dS sur la direction de la force ; le second membre représente donc la projection du déplacement sur la même direction. Dans ce cas, le travail est donc égal au produit de la force par la projection du déplacement sur sa direction. Nous retrouvons ainsi, comme cela était à prévoir, la définition de laquelle nous sommes partis.

2° Supposons en second lieu que la force soit constante en grandeur et reste constamment tangente à la trajectoire ; on a alors

$$\mathfrak{T}r. = F \int_{s_0}^{s} dS = (s_1 - s_0) F,$$

et le travail est égal au produit de la force par le chemin parcouru.

3° Si l'angle α est constant ainsi que la grandeur de la force F, on voit de même que

$$\mathfrak{T}r. = (s_1 - s_0) F \cos \alpha,$$

c'est-à-dire que dans ce cas le travail est égal au produit de la force par le chemin parcouru et par le cosinus de l'angle α.

En particulier, si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si la force est constamment normale au déplacement, le travail total est nul.

163. Théorème I. — *Lorsqu'une force* F *est la résultante de plusieurs autres forces* F_1, F_2,... F_n, *son travail élémentaire, pour un déplacement quelconque du point d'application, est égal à la somme algébrique des travaux des composantes pour le même déplacement.*

Il suffit évidemment de démontrer la proposition pour les travaux élémentaires, c'est-à-dire en supposant que le déplacement soit infiniment petit. Soit donc dS un déplacement infiniment petit quelconque et $f, f_1, f_2, \ldots f_n$ les valeurs respectives des forces quand le point d'application parcourt l'élément dS ; nous avons vu que l'on a en général

$$\mathfrak{T}r.\, f_i = \varpi\,(f_i . dS)\,,$$

et il s'agit alors de prouver que l'on a

$$\varpi(f . dS) = \Sigma\varpi(f_i . dS),$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs 1, 2,... n que l'on peut donner a i. Mais la proposition ramenée à ces termes a été démontrée au début (20) et résulte du reste immédiatement du théorème des projections.

164. Théorème II. — *Quand on considère une force* F *comme la somme géométrique de plusieurs autres forces* F_1, F_2, ...F_n *et un déplacement comme résultant de plusieurs déplacements, le travail de la force* F, *pour le déplacement résultant, est égal à la somme algébrique des travaux des composantes pour les déplacements composants.*

Il suffit encore de démontrer la proposition en supposant que le déplacement soit infiniment petit. Soit donc dS un déplacement infiniment petit résultant de plusieurs autres ds_1, ds_2, ...ds_n, et soient f, f_1, ...f_n les valeurs respectives des forces quand le point d'application parcourt l'élément dS. Tout revient à prouver que l'on a

$$\varpi(f . dS) = \Sigma\varpi(f_i . dS_j),$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs 1, 2, ...n que l'on

peut donner à i et à j. Mais la proposition résulte alors de ce que l'on a démontré au début (20) sur les produits géométriques.

165. **Expression analytique du travail élémentaire.** — D'après cela, si l'on appelle X, Y, Z les composantes d'une force et dx, dy, dz les composantes du déplacement du point d'application, il est aisé d'avoir l'expression du travail élémentaire correspondant. Supposons en effet que les axes de coordonnées soient rectangulaires, et remarquons que les seuls travaux qui ne soient pas nuls sont ceux qui correspondent aux déplacements de même direction que les forces correspondantes ; nous obtenons ainsi pour le travail élémentaire l'expression

$$\mathcal{T}r. = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz.$$

On peut obtenir cette expression d'une autre manière, en partant de l'équation

$$\mathcal{T}r. = \mathrm{F}.d\mathrm{S}.\ \cos\left(\widehat{\mathrm{F}.d\mathrm{S}}\right).$$

On a en effet

$$\cos\left(\widehat{\mathrm{F}.d\mathrm{S}}\right) = \frac{\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz}{\mathrm{F}.d\mathrm{S}},$$

et par suite

$$\mathcal{T}r. = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz.$$

166. Remarque. — Il est bon d'observer que l'expression analytique du travail, prise sous cette forme, n'est pas applicable dans le cas des axes obliques.

167. **Application aux forces émanées de centres fixes et fonctions de la distance.** — Supposons, par exemple, que le point matériel soit en mouvement sous l'action d'une force émanant d'un point fixe O et fonction de la distance r du mobile à ce point.

Supposons, pour fixer les idées, que cette force soit attractive et appelons-la $\varphi(r)$; puis, rapportons le mouvement à

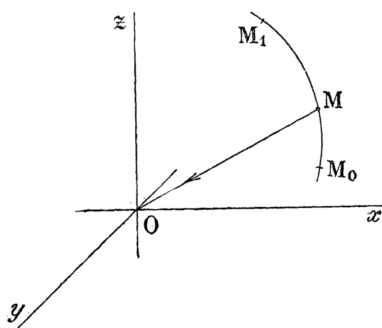


Fig. 52

trois axes rectangulaires passant par le point O (*fig.* 52). Si M est la position du point matériel à un instant quelconque, x, y, z ses coordonnées, α, β, γ les angles de la direction MO avec les axes, on a

$$\cos\alpha = -\frac{x}{r}, \qquad \cos\beta = -\frac{y}{r}, \qquad \cos\gamma = -\frac{z}{r};$$

par suite, les projections orthogonales de la force sur les axes, c'est-à-dire ses composantes suivant ces mêmes axes, seront respectivement

$$X = -\frac{x}{r}\varphi(r),$$

$$Y = -\frac{y}{r}\varphi(r),$$

$$Z = -\frac{z}{r}\varphi(r).$$

Il en résulte, pour le travail élémentaire, l'expression

$$-\frac{\varphi(r)}{r}(xdx + ydy + zdz).$$

Or, on a

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et par suite $$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt},$$

d'où $$rdr = xdx + ydy + zdz\,;$$

de sorte que l'expression du travail élémentaire devient

$$-\varphi(r)\,dr.$$

Si donc le mobile se déplace depuis le point M_0 corres-

pondant à la valeur r_0 de r jusqu'au point M_1 correspondant à la valeur r_1, on aura pour le travail total

$$\mathfrak{T}r. = -\int_{r_0}^{r_1} \varphi(r)\,dr.$$

Dans le cas des forces répulsives, il suffit de changer $\varphi(r)$ en $-\varphi(r)$.

Plus généralement, supposons qu'il y ait n forces attractives ou répulsives émanant de centres fixes et fonctions des distances à ces centres.

Appelons $\varphi_i(r_i)$ la force émanée du centre C_i et considérée comme attractive ou répulsive suivant que $\varphi_i(r_i)$ est négative ou positive.

En vertu du théorème I (163), le travail total sera donné par l'équation

$$\mathfrak{T}r. = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \varphi_1(r_1)\,dr_1 + \cdots\cdots \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \varphi_n(r_n)\,dr_n,$$

en supposant, bien entendu, que le point matériel se déplace depuis le point M_0, pour lequel les distances r_1, $r_2, \ldots$ r_n sont respectivement α_0, $\beta_0, \ldots$ λ_0, jusqu'au point M_1, pour lequel ces distances sont respectivement α_1, $\beta_1, \ldots$ λ_1.

168. Cas particuliers. — Les cas particuliers les plus remarquables sont ceux où la fonction $\varphi(r)$ est, soit proportionnelle à la distance, soit en raison inverse de cette distance, soit en raison inverse du carré de la distance.

Dans le premier cas on a

$$\mathfrak{T}r. = \frac{\mu}{2}(r_1^2 - r_0^2);$$

dans le second

$$\mathfrak{T}r. = \mu \mathrm{L} \cdot \frac{r_1}{r_0};$$

et dans le troisième

$$\mathfrak{T}r. = \mu\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}\right).$$

Dans les trois cas, μ désigne un coefficient de proportionnalité que l'on peut supposer positif dans le cas des forces répulsives et négatif dans le cas des forces attractives.

169. Surfaces de niveau et potentiel. — Dans les applications, il arrive fréquemment que les composantes X, Y, Z de la force qui agit sur un point matériel sont les dérivées partielles d'une même fonction U des coordonnées de ce point, c'est-à-dire que l'on a

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

L'expression du travail élémentaire devient alors

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz;$$

elle est donc la différentielle totale de la fonction $U(x, y, z)$. Or, si l'on suppose X, Y, Z et x, y, z exprimées en fonction d'une même variable, le temps par exemple, le travail total est donné par l'équation

$$\mathcal{T}r. = \int_{t_0}^{t} (Xdx + Ydy + Zdz),$$

en supposant que le point se déplace depuis le temps t_0 jusqu'au temps t.

Si donc on appelle x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point au temps t_0, x, y, z ses coordonnées au temps t, on aura, dans le cas que nous examinons,

$$(3) \qquad \mathcal{T}r. = U(xyz) - U(x_0 y_0 z_0).$$

Lorsque les composantes de la force sont ainsi les dérivées partielles d'une même fonction $U(x, y, z)$ des coordonnées du point matériel, on dit qu'il y a une *fonction des forces*, et $U(x, y, z)$ s'appelle la *fonction des forces*.

On appelle *surfaces de niveau* toutes les surfaces représentées par l'équation

$$U(x, y, z) = C,$$

dans laquelle C représente une constante arbitraire. Ces surfaces sont ainsi nommées parce que si le point matériel se déplace de l'une à l'autre par n'importe quel chemin, le travail total est toujours le même : cela résulte de l'équation (3).

170. Exemples. — 1° Supposons que le point matériel soit soumis à l'action d'une force constante en grandeur et direction, et soient A, B, C les composantes de cette force suivant les axes ; on peut considérer A, B, C comme les dérivées partielles de la fonction

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z\,;$$

la fonction des forces est $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z$ et les surfaces de niveau sont des plans parallèles

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = \mathrm{D}.$$

C'est ainsi que dans le cas de la pesanteur nous avons reconnu (154) que le travail total ne dépend que de la distance verticale parcourue par le point d'application.

2° Supposons que le point se meuve sous l'action d'une force attractive constante en grandeur, émanant de l'origine des axes. Les cosinus directeurs de la direction de la force sont $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$, $-\frac{z}{r}$, et l'on a

$$\mathrm{X} = -\frac{\mu x}{r}, \qquad \mathrm{Y} = -\frac{\mu y}{r}, \qquad \mathrm{Z} = -\frac{\mu z}{r},$$

avec

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

X, Y, Z sont les dérivées partielles de $-\mu\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; la fonction des forces est $-\mu\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et les surfaces de niveau sont des sphères représentées par l'équation

$$-\mu\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \mathrm{C},$$

et ayant pour centre l'origine.

Le cas où il existe une fonction des forces se présente

surtout dans les recherches sur l'électricité et le magnétisme, et on a l'habitude de désigner sous le nom de *potentiel* la fonction des forces changée de signe ; les surfaces de niveau s'appellent alors des *surfaces équipotentielles*.

171. **Définition**. — On appelle *force vive* d'un point matériel en mouvement, la moitié du produit de sa masse par le carré de sa vitesse ; de sorte que si m est la masse du point, v sa vitesse à un instant donné, la force vive à cet instant est $\frac{1}{2}mv^2$.

172. **Théorème III**. — *La différentielle de la force vive pendant un temps infiniment petit* dt, *est égale au travail élémentaire de la résultante pendant ce temps, c'est-à-dire à la somme des travaux élémentaires des composantes.*

Soient en effet x, y, z les coordonnées, à un instant donné, d'un point matériel de masse m rapporté à trois axes rectangulaires. Si l'on appelle x, y, z les composantes, suivant les axes, de la résultante des forces qui agissent sur le point matériel, on a vu (**143**) que les équations du mouvement de ce point sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{Z};$$

soient dx, dy, dz les composantes du déplacement pendant un temps déterminé infiniment petit dt. Si l'on ajoute ces équations membre à membre après les avoir multipliées respectivement par dx, dy, dz, il vient

$$(4)\quad m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\cdot dx + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot dy + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot dz\right) = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz.$$

Or, le second membre de cette équation représente le travail élémentaire de la résultante (165) pendant le temps dt ; d'autre part, en appelant v la vitesse, on a

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

et par suite

$$dv^2 = 2\left[\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{dz}{dt}\right]dt;$$

donc le premier membre de l'équation (4) est égal à $d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$, et l'on a

$$(5) \qquad d\,\frac{mv^2}{2} = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz,$$

ce qui démontre la proposition.

173. **Corollaire.** — *La variation de force vive d'un point matériel pendant un temps quelconque est égale à la somme des travaux des forces qui agissent sur ce point pendant le même temps.*

Le travail de la résultante étant égal à la somme des travaux des composantes pendant le même temps (163), il suffit de démontrer que la variation de force vive pendant un temps quelconque est égale au travail de la résultante. Or, soit F la résultante à un instant quelconque ; si dS est le déplacement infiniment petit pendant le temps dt qui succède à cet instant et α l'angle que fait la direction de la force avec celle du déplacement, le travail élémentaire est

$$\mathrm{F}\cos\alpha . d\mathrm{S} ;$$

le travail total depuis le temps t_0 pour lequel $\mathrm{S} = s_0$, jusqu'au temps t pour lequel $\mathrm{S} = s$, est par suite

$$\int_{s_0}^{s} \mathrm{F}.\cos\alpha . d\mathrm{S}.$$

D'autre part, en vertu du théorème précédent, on a, pen-

dant le temps considéré,

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathrm{F}\cos\alpha . d\mathrm{S};$$

donc

$$(6) \qquad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{s_0}^{s} \mathrm{F}\cos\alpha . d\mathrm{S},$$

v_0 désignant la vitesse au temps t_0 et v la vitesse au temps t. Cette équation exprime le théorème énoncé.

174. Remarque. — La proposition précédente porte le nom de *théorème des forces vives*, et l'équation (6) ou, ce qui revient au même, l'équation (5) s'appelle l'*équation des forces vives*. On peut l'utiliser dans certains cas pour déterminer la vitesse à un instant quelconque, sans qu'il soit nécessaire d'avoir l'équation de la trajectoire. Tel est le cas où il existe une fonction des forces ; car, s'il existe une fonction des forces, $\mathrm{U}(x, y, z)$, on peut évaluer l'intégrale définie qui figure au second membre de l'équation (6), et l'on a

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \mathrm{U}(x, y, z) - \mathrm{U}(x_0, y_0, z_0).$$

Faisons quelques applications.

175. Application I. — Supposons d'abord qu'un point matériel de masse m se meuve dans le vide sous l'action de la pesanteur. En supposant que l'axe des z soit vertical et que la direction positive soit opposée à celle de la pesanteur, la fonction des forces est $-mgz$; par suite l'équation des forces vives donne, quelle que soit la nature de la trajectoire,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg(z - z_0),$$

c'est-à-dire

$$v^2 = v_0^2 - 2g(z - z_0).$$

Il en résulte, ainsi que cela a déjà été remarqué (126, 2°) que si le point part d'un plan horizontal pour revenir au même plan horizontal, la vitesse reprend la même valeur.

176. **Application II.** — Comme seconde application, supposons qu'un point matériel de masse m soit attiré par une droite fixe proportionnellement à sa distance à la droite; supposons d'ailleurs la force normale à cette droite, que nous prendrons pour axe des z.

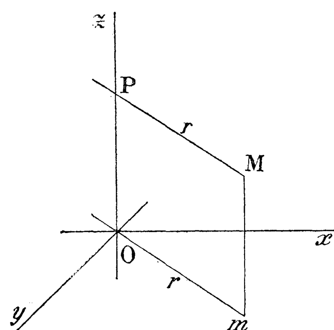


Fig. 53

Soient x, y, z les coordonnées du point mobile dans l'une quelconque, M (*fig.* 53), de ses positions et soit r sa distance MP à l'axe; les cosinus directeurs de MP sont $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$ et 0; par suite, les composantes de la force suivant les axes sont

$$X = -\mu x, \qquad Y = -\mu y, \qquad Z = 0,$$

μ désignant un coefficient de proportionnalité.

Si l'on observe que $xdx + ydy = rdr$, l'équation des forces vives est

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu\int_{r_0}^{r} rdr,$$

et donne

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{\mu}{2}(r^2 - r_0^2),$$

c'est-à-dire

$$(7) \qquad v^2 = v_0^2 - \frac{\mu}{m}(r^2 - r_0^2).$$

La fonction des forces est $-\frac{\mu r^2}{2}$, et les surfaces de niveau sont des cylindres de révolution autour de Oz. On voit sur l'équation (7) que si $r = r_0$, c'est-à-dire que si le

mobile part d'une surface de niveau pour aller à une autre surface de niveau par *n'importe quel chemin*, la vitesse du mobile est la même dans les deux cas.

Ce résultat s'étend à toutes les surfaces de niveau, *pourvu qu'elles ne se coupent pas*.

Nous donnerons, dans les chapitres suivants, d'autres applications du théorème de la force vive ; nous allons terminer ce chapitre par quelques remarques sur l'homogénéité des formules de la Mécanique.

177. **Remarques sur l'homogénéité des formules de la mécanique.** — On montre, en géométrie analytique, que si une relation entre les lignes d'une figure a été établie sans que l'unité de longueur ait été fixée, cette relation est homogène : c'est en cela que consiste le principe de l'homogénéité. Ce principe, qui sert à la vérification des formules, se retrouve dans toute science basée sur les relations qui existent entre des grandeurs d'espèces différentes. Telle est la mécanique, dont l'étude fait intervenir trois espèces de grandeurs : longueurs, temps et masses. Toutes les formules de la mécanique devront donc être homogènes par rapport à ces trois espèces de grandeurs, et il importe de pouvoir s'en assurer rapidement. On y parvient en fixant ce qu'on appelle les *dimensions* des diverses quantités que nous avons rencontrées soit en cinématique, soit en dynamique. Les exemples qui suivent feront comprendre ce qu'il faut entendre par là.

1° La vitesse est le quotient d'une longueur par un temps ; on dit qu'elle est de dimension 1 par rapport aux longueurs et de dimension -1 par rapport au temps, 0 par rapport aux masses.

2° L'accélération est le quotient d'une vitesse par un temps ; elle sera donc de dimension 1 par rapport aux longueurs et de dimension -2 par rapport aux temps, 0 par rapport aux masses.

3° La force, dérivée de la masse, est égale au produit d'une

masse par une accélération; elle sera donc de dimensions respectives $1, 1$ et -2, par rapport aux longueurs, aux masses et aux temps.

4° Le travail, qui est le produit de la force par un déplacement, sera de dimensions respectives $2, 1$ et -2 par rapport aux longueurs, aux masses et aux temps.

5° Enfin la force vive a les mêmes dimensions que le travail, ce qui doit être, sans quoi l'équation des forces vives ne serait pas exacte.

Il est aisé, avec cela, de vérifier les formules de la mécanique. Prenons par exemple la formule

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

du mouvement ascendant d'un point matériel pesant dans le vide; x est de dimensions respectives $1, 0, 0$ par rapport aux longueurs, aux temps et aux masses. Or, on constate immédiatement, à l'aide des remarques qui précèdent, qu'il en est de même du second membre; par exemple v_0 est de dimensions respectives $1, -1, 0$ par rapport aux longueurs, aux temps et aux masses; donc $v_0 t$ est de dimensions respectives $1, 0, 0$.

CHAPITRE VII

FORCES CENTRALES ET MOUVEMENT DES PLANÈTES

178. **Définition.** — On appelle *forces centrales* les forces passant par un centre fixe. Nous allons indiquer quelques propriétés du mouvement d'un point soumis à une force centrale.

179. **Théorème des aires.**— *Lorsqu'un point matériel est en mouvement sous l'action d'une force passant par un point fixe* O, *la trajectoire est une courbe située dans un plan passant par ce point, et les aires décrites par le rayon vecteur qui va du point fixe au mobile sont proportionnelles aux temps employés à les décrire.*

Rapportons le mouvement à trois axes rectangulaires passant par le point O et soient, à un instant donné, X, Y, Z les composantes de la force suivant les axes, x, y, z les coordonnées du point matériel, dont nous supposerons la masse égale à m. On a, par hypothèse,

$$(1) \qquad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

et les équations du mouvement sont

$$(2) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Des équations (2) on déduit

$$(3) \qquad m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = yZ - zY$$

et deux autres équations analogues, par permutation circulaire des lettres; mais, en vertu des équations (1), le second membre de l'équation (3) est nul, de sorte que cette équation se réduit à

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

D'autre part, le premier membre de cette nouvelle équation est la dérivée de $y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}$, par rapport au temps; cette dérivée étant nulle, l'expression $y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}$ est constante. On peut donc écrire

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= C'', \\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} &= C', \\ x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= C. \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on ajoute ces équations membre à membre après les avoir multipliées respectivement par x, y, z, il vient

$$C''x + C'y + Cz = 0,$$

ce qui démontre la première partie de la proposition.

La seconde partie résulte d'une remarque déjà faite en cinématique (99); en effet, $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$ est le double de la vitesse aréolaire de la projection du mobile sur le plan xOy, le centre des aires étant le point O. La troisième équation (4) exprime donc que cette vitesse aréolaire est constante et, comme il en est de même sur les plans yOz et zOx, on en conclut que la vitesse aréolaire du mobile, quand on

prend le point O comme centre des aires, est constante, ce qui démontre la seconde partie.

180. **Théorème.** — *Réciproquement, si la trajectoire est une courbe plane et si la vitesse aréolaire, quand on prend un point* O *de ce plan comme centre des aires, est constante, la force passe par le point* O.

Supposons encore le mouvement rapporté à un trièdre trirectangle passant par O. La vitesse aréolaire étant constante, il en est de même des vitesses aréolaires des projections du mobile sur les plans yOz, zOx et xOy, ce qui s'exprime au moyen des équations (4). En différentiant les deux membres de chacune de ces équations par rapport à t, on obtient trois nouvelles équations

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

qui expriment que les composantes de l'accélération du mobile sont proportionnelles à ses coordonnées ; d'autre part, elles sont proportionnelles aux composantes de la force ; donc on a

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

ce qui démontre la proposition.

181. Remarque. — Si l'on prend le plan de la trajectoire pour plan des xy, les équations (4) se réduisent à l'équation unique

$$(5) \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C.$$

C s'appelle la *constante des aires* et on la détermine d'après les données initiales. Soit en effet v_0 la vitesse initiale et soit p_0 (*fig.* 54) la perpendiculaire abaissée du centre des aires sur le vecteur v_0. A cause de la signification du premier membre de l'équation (5), C représente le double de la vitesse aréolaire ; d'autre part on a vu en cinématique que le double de la vitesse aréolaire est égal à $v_0 p_0$; on a donc

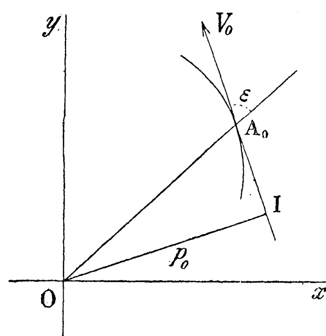


Fig. 54

$$C = v_0 p_0,$$

équation dans laquelle, il ne faut pas l'oublier, v_0 est affectée d'un signe fixé en même temps que le sens du mouvement du mobile sur sa trajectoire. Si l'on appelle r_0 la distance de la position initiale A_0 du mobile au point O et ε l'angle du vecteur v_0 avec le rayon vecteur OA_0, on a

$$p_0 = r_0 \sin \varepsilon,$$

et par suite

$$C = v_0 r_0 \sin \varepsilon.$$

Il est bon d'ajouter que si A_0V_0 prolongée passe par le point O, la constante C est nulle et le mouvement s'effectue suivant le rayon qui va du point O à la position initiale.

182. **Expression de la vitesse.** — Étudions les autres propriétés du mouvement et cherchons d'abord la vitesse. Si l'on suppose la trajectoire rapportée à des coordonnées polaires, on a vu (55) que si l'on appelle v la vitesse à un instant quelconque, r et θ les coordonnées du point à cet instant, on a

(6) $$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Il est possible d'obtenir l'expression de la vitesse en fonction des coordonnées polaires du mobile seulement. En effet, en coordonnées polaires, l'équation (5), qui exprime le principe des aires, s'écrit sous la forme simple

(7) $$r^2\frac{d\theta}{dt} = C\,;$$

et, si l'on élimine dt entre les équations (6) et (7), il vient

(8) $$v^2 = C^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right].$$

Cette équation résout le problème; si donc l'équation de la trajectoire est

$$\frac{1}{r} = f(\theta),$$

on a

$$v^2 = C^2[f^2(\theta) + f'^2(\theta)].$$

Enfin, en vertu d'une remarque faite en cinématique et rappelée numéro 181, si l'on appelle v le vecteur qui représente la vitesse à un instant quelconque et p la longueur de la perpendiculaire menée à ce vecteur prolongé, par le centre des aires, la vitesse aréolaire est égale à $\frac{vp}{2}$, et par suite, à cause du principe des aires, on a

$$vp = C.$$

Ainsi, le produit de la vitesse à un instant quelconque, par la perpendiculaire à cette vitesse menée du centre des aires est constant.

183. **Expression de la force.** — Considérons la force qui agit sur le mobile comme positive quand elle est répulsive, comme négative dans le cas contraire, et appelons F sa

valeur algébrique. En vertu du théorème des forces vives, on a

$$d\frac{mv^2}{2} = \mathrm{F}dr,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{F} = \frac{m}{2} \cdot \frac{dv^2}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dr};$$

mais de l'équation (8) on tire, toutes réductions faites,

$$\frac{dv^2}{d\theta} = -\frac{2\mathrm{C}^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right]\frac{dr}{d\theta};$$

on en conclut

$$\mathrm{F} = -\frac{m\mathrm{C}^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right]. \tag{9}$$

Si donc on connaît l'équation de la trajectoire, cette équation fera connaître la force F, ou inversement, si F ne dépend que de r et de θ, elle définira la trajectoire. En particulier, si l'on considère le cas des coniques et si l'on a

$$\frac{1}{r} = \frac{p}{1 + e\cos\theta},$$

l'équation (9) donne

$$\mathrm{F} = -\frac{m\mathrm{C}^2}{pr^2};$$

ce qui montre que la force est alors en raison inverse du carré de la distance.

184. Remarque. — On prouve en géométrie analytique que, si une courbe plane est rapportée à des coordonnées polaires r et θ, l'expression $\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}$ est négative ou positive suivant que la courbe est concave ou convexe vers le pôle. Si l'on rapproche cette remarque de l'équation (9),

on voit que la force est toujours dirigée du même côté que la concavité de la trajectoire.

185. Mouvement des planètes. — Nous supposerons les planètes réduites à leurs centres de gravité, c'est-à-dire à des points matériels. Les lois du mouvement sont les suivantes :

1° *Les trajectoires des planètes autour du soleil sont des courbes planes, et les aires décrites par les rayons vecteurs allant du centre du soleil aux centres des planètes sont proportionnelles aux temps employés à les décrire.*

2° *Les trajectoires sont des ellipses dont le centre du soleil est un foyer.*

3° *Les carrés des temps des révolutions sidérales sont proportionnels aux cubes des grands axes de ces ellipses.*

Elles portent le nom de *lois de Képler*, qui les a déduites des observations de Tycho-Brahé. Newton en a déduit la force qui produit le mouvement de la manière suivante :

En vertu de la première loi, puisque la trajectoire est plane et que le théorème des aires a lieu par rapport à un point de ce plan, c'est que la force est centrale et passe par ce point. D'autre part, en vertu de la seconde loi, la trajectoire est une ellipse dont le centre du soleil est un foyer ; or nous avons vu, numéro 183, que dans ce cas l'expression de la force est

$$F = -\frac{mC^2}{pr^2},$$

C désignant la constante des aires et p le paramètre de la conique. On voit donc que la force est en raison inverse du carré de la distance au centre du soleil.

Posons $\mu = \frac{C^2}{p}$; nous allons montrer, en nous basant sur la troisième loi, que la constante μ est la même pour

toutes les planètes. En effet, soient T la durée de la révolution sidérale, a et b les demi-axes de la trajectoire. Le double de l'aire décrite pendant le temps T, par le rayon vecteur qui va du centre du soleil au centre de la planète, est

$$2\pi ab,$$

et comme la vitesse aréolaire est constante, le double de cette vitesse est $\frac{2\pi ab}{T}$; on a donc

$$C = \frac{2\pi ab}{T},$$

et par suite

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2 p};$$

or, $p = \frac{b^2}{a}$; donc

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Mais, en vertu de la troisième loi, le rapport $\frac{a^3}{T^2}$ est le même pour toutes les planètes; donc il en est de même de μ, et l'expression de la force, pour toutes les planètes, est

$$F = -\frac{m\mu}{r^2}.$$

Tout se passe donc comme si le soleil attirait les planètes proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leurs distances au soleil. Telle est la loi de laquelle Newton a déduit le principe de la gravitation universelle.

Après avoir montré comment on peut déduire la force de l'observation du mouvement, nous allons résoudre le problème inverse.

186. **Problème**. — *Trouver la trajectoire d'un point matériel de masse* m *attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.*

Rapportons le mouvement à un système de coordonnées polaires, en prenant pour pôle le centre fixe et pour axe polaire une droite quelconque menée par ce point dans le plan de la trajectoire ; on sait du reste, d'après ce qui a été dit sur les forces centrales, que la trajectoire est une courbe plane. Soit

$$F = -\frac{m\mu}{r^2}$$

l'expression de la force ; on aura la trajectoire en remplaçant F par cette valeur dans l'équation (9), ce qui donne, après simplification,

$$\mu = C^2\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

Posons alors

$$(10) \qquad \frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} = \xi\,;$$

l'équation précédente devient

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = 0.$$

Mais nous avons déjà rencontré une équation de cette forme, numéro 146 ; et, en nous reportant à ce numéro, nous voyons que l'on a dans le cas actuel

$$\xi = A \cos(\theta - \alpha),$$

A et α désignant deux constantes arbitraires que nous déterminons à l'aide des données initiales du problème. Remplaçant ξ par la valeur trouvée dans l'équation (10), il vient pour l'équation de la trajectoire

$$(11) \qquad \frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} + A\cos(\theta - \alpha).$$

Cette équation représente une conique rapportée à un foyer ; *donc la trajectoire est une conique ayant un foyer au centre fixe*.

Observons, du reste, que le calcul précédent, qui a été fait

en supposant la force attractive, s'applique au cas d'une force répulsive : il n'y a qu'à supposer $\mu < 0$.

Cela posé, si nous appelons p le paramètre de la trajectoire, e son excentricité et α l'angle que l'axe focal fait avec l'axe polaire, l'équation de cette courbe peut encore s'écrire

$$(12) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos(\theta - \alpha).$$

En identifiant les équations (11) et (12), on en tire

$$p = \frac{C^2}{\mu}, \qquad A = \frac{\mu e}{C^2},$$

ce qui donne les valeurs de deux des constantes qui entrent dans l'équation (11) au moyen des éléments de la trajectoire.

Déterminons maintenant ces constantes à l'aide des données initiales. Soient pour cela O (*fig.* 54) le centre fixe, r_0 et θ_0 les coordonnées de la position initiale A_0 du mobile, v_0 la vitesse initiale et ε l'angle que fait cette vitesse initiale avec le rayon vecteur OA_0. On a vu en cinématique que les composantes de la vitesse suivant le rayon vecteur et suivant la perpendiculaire à ce rayon, sont respectivement

$$\frac{dr}{dt} \qquad \text{et} \qquad r\frac{d\theta}{dt};$$

les composantes de la vitesse initiale suivant les mêmes directions sont donc

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 \qquad \text{et} \qquad r_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0.$$

D'autre part elles sont aussi

$$v_0 \cos\varepsilon \qquad \text{et} \qquad v_0 \sin\varepsilon;$$

on a donc

$$v_0 \cos\varepsilon = \left(\frac{dr}{dt}\right)_0,$$

$$v_0 \sin\varepsilon = r_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0.$$

Enfin, d'après le théorème des aires,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2},$$

de sorte que les deux équations précédentes peuvent aussi s'écrire

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} v_0 \cos \varepsilon &= -\frac{1}{C} \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} \right)_0, \\ v_0 \sin \varepsilon &= \frac{C}{r_0}. \end{aligned} \right.$$

Or, de l'équation de la trajectoire on déduit les équations

$$\left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} \right)_0 = -\frac{\mu e}{C^2} \sin (\theta_0 - \alpha),$$

et

$$e \cos (\theta_0 - \alpha) = \frac{C^2}{\mu r_0} - 1,$$

qui donnent, en tenant compte des équations (13),

$$e \cos (\theta_0 - \alpha) = \frac{v_0^2 r_0 \sin^2 \varepsilon}{\mu} - 1,$$

$$e \sin (\theta_0 - \alpha) = \frac{v_0^2 r_0 \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\mu};$$

on a du reste

$$C = v_0 r_0 \sin \varepsilon.$$

Ces trois équations définissent les constantes arbitraires qui entrent dans l'équation de la trajectoire ; la dernière détermine C et les deux premières donnent e et α sans ambiguïté. On en tire

$$e^2 - 1 = \frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2 \varepsilon}{\mu^2} \left[v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} \right],$$

d'où il suit que la trajectoire sera :

une ellipse si $v_0^2 < \dfrac{2\mu}{r_0}$;

une hyperbole si $v_0^2 > \dfrac{2\mu}{r_0}$;

une parabole si $v_0^2 = \dfrac{2\mu}{r_0}$.

Il suit de là que la nature de la trajectoire ne dépend que de la vitesse initiale et de la distance de la position initiale du mobile au centre fixe ; elle est indépendante de la direction de la vitesse initiale, de sorte que si plusieurs mobiles partent du même point avec la même vitesse initiale et dans toutes les directions possibles, les trajectoires décrites sont toutes de même nature.

187. **Vitesse en un point.** — La vitesse du mobile en un point s'obtient soit en appliquant la formule

$$v^2 = C^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right]$$

obtenue numéro 182, soit en appliquant le théorème des forces vives, qui donne ici

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + C.$$

188. **Expression du temps.** — Il nous reste à trouver le temps que met le mobile pour aller d'un point à un autre de sa trajectoire. Supposons pour cela que celle-ci soit une ellipse dont le grand axe est AA′ (*fig.* 55), et dont un foyer, F, coïncide avec le centre attractif. Soient m une position quelconque du mobile et M le point correspondant du cercle homographique; on sait que si a et b sont les demi-axes de l'ellipse, celle-ci peut être considérée

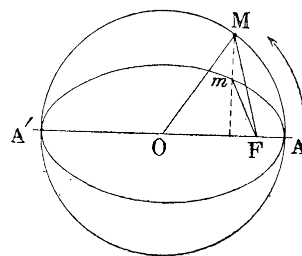


Fig. 55

comme la projection orthogonale du cercle homographique dont on aurait fait tourner le plan d'un angle α tel que

$\cos \alpha = \frac{b}{a}$; il en résulte que l'on a

$$\text{secteur } m\text{FA} = \frac{b}{a} \text{ secteur MFA}.$$

Or, si u désigne l'angle AOM et c la demi-distance focale, on a

$$\text{secteur MFA} = \text{secteur MOA} - \text{triangle MOF}$$
$$= \frac{a^2 u}{2} - \frac{ac}{2} \cos u;$$

donc, si l'on pose, comme d'habitude, $\frac{c}{a} = e$, il vient

$$\text{secteur } m\text{FA} = \frac{ab}{2}(u - e \sin u).$$

D'autre part, supposons que l'on compte le temps à partir de l'instant où le mobile passe au point A, et appelons C la constante des aires ; on aura

$$\text{secteur } m\text{FA} = \frac{\text{C}}{2} t,$$

et par suite

$$ab(u - e \sin u) = \text{C}t;$$

on met d'habitude cette équation sous la forme

$$u - e \sin u = nt,$$

en posant

$$\text{C} = nab,$$

et on l'appelle l'*équation de Képler.* L'angle u qui figure dans l'équation de Képler s'appelle l'*anomalie excentrique,* et on donne le nom d'*anomalie moyenne* au second membre de l'équation. Si d'ailleurs T est la durée de la révolution complète de la planète, l'équation doit donner $t = \text{T}$ pour $u = 2\pi$; on en conclut

$$2\pi = n\text{T},$$

d'où

$$n = \frac{2\pi}{\text{T}}.$$

En résumé, pour calculer le temps on calcule d'abord l'anomalie excentrique et l'on obtient ensuite le temps au

moyen de l'équation de Képler. Toutefois, comme l'observation fournit l'angle $AFm = \theta$, il est nécessaire de montrer comment de la valeur de θ on peut déduire celle de u. Posons pour cela $Fm = r$ et appelons x l'abscisse du point m par rapport aux deux axes rectangulaires Ox et Oy. On sait que

$$r = a - ex\ ;$$

or,

$$x = a \cos u,$$

donc

$$(14) \qquad r = a(1 - e \cos u).$$

D'autre part, l'équation polaire de l'ellipse donne

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

et l'on en déduit, par comparaison avec l'équation (14),

$$a(1 - e \cos u) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

En remplaçant, dans cette dernière équation, $\frac{p}{a}$ par $\frac{b^2}{a^2}$, c'est-à-dire par $1 - e^2$, on en tire

$$1 - e \cos u = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta}.$$

Enfin, en calculant le quotient

$$\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u},$$

on obtient finalement

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

On a d'ailleurs pris le signe $+$ devant le radical parce que $\operatorname{tg} \frac{u}{2}$ et $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ sont toujours de même signe.

CHAPITRE VIII

MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE COURBE OU SUR UNE SURFACE FIXES

189. **Mouvement d'un point sur une courbe fixe.** — Lorsqu'un point matériel est assujetti à rester sur une courbe fixe, *on admet* qu'il exerce sur la courbe une certaine action et qu'il éprouve de la part de la courbe une réaction égale et opposée. Ce principe a été énoncé par Newton sous le nom de *principe de l'égalité de l'action et de la réaction*.

Quand le point matériel est en mouvement sur la courbe et que le mouvement s'effectue sans frottement, on admet que l'action du point sur la courbe et que la réaction de la courbe sur le point sont normales à la courbe. Si donc M (*fig.* 56) est la position du mobile à un instant donné et N la réaction normale de la courbe, l'action de celle-ci étant équivalente à la réaction normale N, on pourra, dans l'étude du mouvement du point M, faire abstraction de la courbe et considérer le point M comme libre dans l'espace, à la condition de lui appliquer la force F qui produit le mouvement et la réaction normale N. La force F est dite la résultante des *forces extérieures* qui agissent sur le point M.

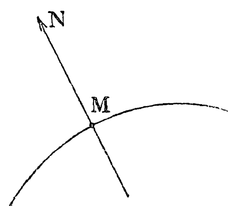


Fig. 56

Cela posé, si l'on remarque que la position du point M sur la courbe fixe ne dépend que d'un seul paramètre, on voit qu'il suffira d'une seule équation pour définir le mouvement. Pour obtenir cette équation, on applique le théorème des forces vives en remarquant que la réaction N étant constamment normale à la trajectoire, son travail est nul; de sorte que si X, Y, Z sont les composantes de la force F suivant les axes, m la masse du point matériel et v sa vitesse à un instant quelconque, on aura simplement

$$(1) \qquad d\frac{mv^2}{2} = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz.$$

Si d'ailleurs

$$(2) \qquad f(x, y, z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

sont les équations de la courbe, on a les relations

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = 0,$$

définissant deux des différentielles dx, dy, dz qui figurent dans l'équation des forces vives.

190. **Calcul de la réaction.** — Pour calculer la réaction, on décompose cette force en deux autres dirigées suivant les normales aux surfaces représentées par les équations (2) qui définissent la courbe. Les cosinus directeurs de ces deux normales étant proportionnels respectivement à

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z},$$

et à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

si l'on désigne par λ et μ deux facteurs convenablement choisis, on pourra représenter les composantes de la réac-

tion, suivant les axes, par

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

et ces composantes seront connues en même temps que λ et μ. Mais les équations du mouvement du point s'écrivent alors

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Or, une fois que le mouvement est connu, on connaît x, y, z en fonction de t, et par suite les équations (3) donnent λ et μ; ces équations se réduisent du reste à deux, car si on les ajoute membre à membre après les avoir multipliées respectivement par dx, dy, dz, on obtient l'équation des forces vives, qui est indépendante de λ et de μ.

191. Remarque. — On peut diriger autrement le calcul de la réaction. Imaginons en effet que l'on ait décomposé la résultante F des forces extérieures en trois autres F_t, F_n et F_b dirigées respectivement suivant la tangente, la normale principale et la binormale en M à la trajectoire. Décomposons de même la réaction N en deux forces N_n et N_b dirigées également suivant la normale principale et suivant la binormale. Puisque le mouvement s'effectue dans le plan osculateur, les composantes suivant la binormale se détruisent, et l'on a

$$(4) \qquad F_b + N_b = 0.$$

D'autre part, les autres composantes doivent donner la force tangentielle et la force centripète; par suite on a aussi

$$(5) \qquad F_t = m \frac{dv}{dt},$$

$$(6) \qquad F_n + N_n = \frac{mv^2}{\rho}.$$

L'équation (5) est indépendante de la réaction et donne le mouvement du point sur la courbe : c'est l'équation des forces vives. Les équations (4) et (6) définissent alors les composantes de la réaction.

Si, en particulier, il y a une fonction des forces, en la désignant par U on a

$$\frac{mv^2}{2} = U + h,$$

h désignant une constante. De là on peut tirer v^2, et en portant dans l'équation (6) on pourra, au moyen de cette équation et de l'équation (4), déterminer la réaction sans connaître le mouvement.

192. **Pendule simple.** — Nous allons appliquer les considérations générales qui précèdent au mouvement du pendule simple dans le vide.

On appelle pendule simple un point matériel pesant mobile sans frottement sur une circonférence située dans un plan vertical.

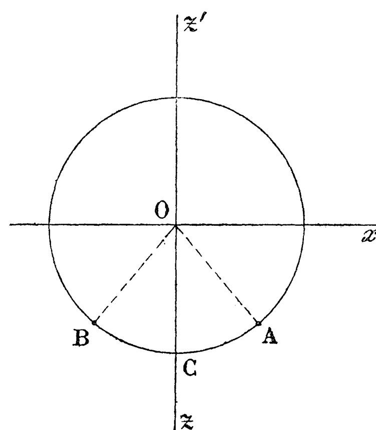


Fig. 57

Soient O (*fig.* 57) et l le centre et le rayon de la circonférence, que nous supposerons rapportée à deux diamètres rectangulaires dont l'un oz' est vertical. Prenons comme sens positif, sur le cercle O, le sens positif des arcs trigonométriques et supposons le

mobile abandonné à lui-même, au point A, sans vitesse initiale. Si m est la masse du point matériel, le travail élémentaire a pour expression $mgdz$ et, par suite, le théorème des forces vives donne

$$d\,\frac{mv^2}{2} = mgdz\,;$$

d'où, en désignant par C une constante,

$$v^2 = 2g(C + z).$$

Nous déterminerons la constante en exprimant qu'au point A pour lequel $z = a$, la vitesse est nulle, ce qui donne

$$C = -\,a$$

et par suite

$$(7) \qquad v^2 = 2g\,(z - a).$$

La constante étant ainsi déterminée, la formule (7) montre que la valeur numérique de la vitesse n'est réelle que si l'on a $z > a$; elle augmente à mesure que z croît, devient maximum lorsque z devient égal à l, puis diminue et redevient nulle lorsque z devient de nouveau égal à a. Ainsi, la vitesse croît quand le mobile descend de A en C, diminue ensuite et redevient nulle quand il monte du point C au point B symétrique de A par rapport à OC. Là, le mobile se trouve dans les mêmes conditions qu'au départ du point A; par conséquent il revient de B en A dans le même temps qu'il est allé de A en B, et la vitesse repasse par la même suite de valeurs dans l'ordre inverse. Il oscille ensuite indéfiniment entre A et B.

Cherchons la durée d'une oscillation. Pour cela désignons par α l'angle COA, compté positivement comme cela a été dit plus haut, et appelons θ l'angle variable, positif ou négatif, que fait le rayon OC avec le rayon OM qui va du point O au mobile, dans l'une quelconque de ses positions M. On a visiblement

$$a = l \cos \alpha,$$

$$z = l \cos \theta,$$

et par suite

$$v^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\alpha).$$

D'autre part,

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2;$$

donc

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha);$$

d'où l'on tire

$$dt = \pm\sqrt{\frac{l}{2g}}\cdot\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

Pour choisir le signe dans le second membre il suffit de remarquer qu'au départ la vitesse est négative puisque le mouvement s'effectue dans le sens négatif ; par conséquent on a

$$v = \frac{ds}{dt} = -l\frac{d\theta}{dt},$$

et l'on devra prendre le signe —, de sorte que l'on aura

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

On en déduit

$$(8) \qquad t = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_\alpha^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

On ne sait pas évaluer l'intégrale définie qui figure dans le second membre de cette égalité, lorsque α est un angle quelconque ; mais si l'on suppose que α soit très petit, il en sera de même de θ et l'on pourra poser approximativement

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \qquad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

La formule (8) devient ainsi

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int_\alpha^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}},$$

et, en intégrant,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\arc\cos\frac{\theta}{\alpha}.$$

En faisant $\theta = 0$, on aura le temps employé par le mobile pour aller de A en C, c'est-à-dire la durée d'une demi-oscillation ; cette durée est

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}};$$

donc la durée τ de l'oscillation complète sera

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

On voit donc que si l'amplitude de l'oscillation est très faible, *la durée de l'oscillation est indépendante de l'angle d'écart.*

Proposons-nous de calculer la réaction du cercle en chaque point traversé par le point matériel. Soit N cette réaction, que nous considérerons comme positive quand elle est dirigée vers le centre du cercle, et soit F_n la composante normale de la pesanteur. Si l'on se reporte aux formules (4) et (6), on voit que l'on a dans le cas actuel

$$F_n + N = \frac{mv^2}{l};$$

on a d'ailleurs

$$F_n = -mg\cos\theta = -\frac{mgz}{l},$$

et

$$v^2 = 2g(z-a);$$

de sorte que

$$N = \frac{2mg(z-a)}{l} + \frac{mgz}{l},$$

ou bien

$$N = \frac{mg}{l}(3z - 2a).$$

D'après cela, la réaction croît quand le point descend sur le cercle et elle est maximum au point C; elle s'annule et change de signe aux points du cercle pour lesquels $z = \frac{2a}{3}$, ce qui n'arrive jamais quand le point est abandonné en A sans vitesse initiale, puisque nous avons reconnu que z doit être, dans ce cas, toujours supérieur à a.

193. Remarque. — Au lieu d'étudier le mouvement d'un point sur une courbe en projetant sur trois axes comme nous l'avons fait numéro 189, on peut projeter le mouvement sur la tangente et sur la normale principale à la courbe. De cette façon le mouvement sera défini par l'équation (5) du numéro 191, et la réaction par les formules (4) et (6) du même numéro.

Si l'on opère en particulier ainsi dans le cas du pendule on a, pour définir le mouvement, l'équation

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \theta. \tag{9}$$

D'ailleurs, ainsi que nous l'avons déjà vu,

$$v = -l \frac{d\theta}{dt},$$

et l'équation (9) s'écrit

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta.$$

Il est aisé de ramener cette équation à l'équation (8). Pour cela, multiplions les deux membres par $2\frac{d\theta}{dt}$; nous obtenons

$$2\frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{2g}{l} \cdot \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \cdot$$

Sous cette forme le premier membre est la dérivée de $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ et le second membre la dérivée de $\frac{2g}{l}\cos\theta$. Si donc α désigne une constante, on a

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

et par suite

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_\alpha^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} \cdot$$

194. Mouvement d'un point sur une surface fixe. — Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface rapportée à trois axes rectangulaires. Nous supposerons encore que le mouvement s'effectue sans frottement, de sorte que le point matériel sera soumis à l'action des forces extérieures, que l'on définit comme précédemment, et à la réaction de la surface, que l'on suppose normale à cette surface. Soient X, Y, Z les composantes, suivant les axes, de la résultante des forces extérieures ; puisque la réaction est normale à la surface, on pourra représenter ses composantes suivant les axes par

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial z},$$

λ désignant un facteur convenablement choisi. Les équations du mouvement seront alors

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= \mathrm{X} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= \mathrm{Y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= \mathrm{Z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

et ces trois équations, jointes à l'équation de la surface, définissent les quatre inconnues x, y, z, λ. On obtient facilement au moyen des équations (10) une équation indépendante de λ ; il suffit pour cela de les ajouter membre à membre après les avoir multipliées respectivement par dx, dy, dz, ce qui donne

$$(11) \qquad d \frac{mv^2}{2} = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz ;$$

car, à cause de l'équation de la surface, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

L'équation (11) ainsi obtenue n'est autre que l'équation des forces vives, et on aurait pu l'écrire immédiatement en remarquant que le travail de la réaction est nul.

En éliminant λ d'une autre manière entre les équations (10) on aurait une deuxième équation qui, jointe à l'équation (11), définirait le mouvement du point matériel sur la surface, ce qui revient à dire qu'il faudra joindre l'équation de la surface aux deux équations précédentes. Connaissant ainsi le mouvement, on connaît x, y, z en fonction de t, et par suite, l'une quelconque des équations (10) fait connaître λ, c'est-à-dire permet de déterminer la réaction normale. Il est bien entendu d'ailleurs que l'équation (11) se simplifie quand il y a une fonction des forces. Mais nous nous bornerons à ces quelques indications sur le mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une surface fixe.

195. **Équilibre d'un point matériel sur une courbe ou sur une surface fixes.** — Les conditions d'équilibre d'un point matériel posé sur une courbe ou sur une surface fixes, résultent des développements qui précèdent. On opère comme si le point était libre et soumis seulement à l'action des forces extérieures et de la réaction qui est normale, soit à la courbe soit à la surface, quand il n'y a pas de frottement.

D'après cela, les conditions d'équilibre d'un point sur une courbe s'obtiendront en égalant à zéro les seconds membres des équations (3). Les trois équations ainsi obtenues, jointes aux équations de la courbe, définissent la position d'équilibre et la réaction normale correspondante. On opère d'une manière analogue pour trouver les conditions d'équilibre d'un point assujetti à rester sur une surface.

Enfin, au lieu de projeter les forces extérieures et la réaction normale sur trois axes rectangulaires pour obtenir les trois équations de l'équilibre, on peut les projeter sur la tangente et sur la normale principale, si le point est assujetti à rester sur une courbe ; sur la normale et sur deux axes rectangulaires menés dans le plan tangent quand le point est assujetti à rester sur une surface.

196. Application. — *Un point matériel pesant, de poids* p, *est assujetti à rester sur un cercle vertical* OA (fig. 58) *et est repoussé par le point* A *proportionnellement à la distance ; trouver les positions d'équilibre.*

Soit M une position d'équilibre. Prenons comme inconnue l'angle $A'OM = x$, compté positivement dans le sens de A' vers M, et prenons comme sens positif sur la tangente en M le sens des arcs positifs. Le point M est soumis à l'action de trois forces : son poids p, dirigé suivant la verticale ; la répulsion du point A, dirigée suivant AM et que nous représenterons par $\mu.AM$; et enfin la réaction du cercle, dirigée vers le centre. Nous obtiendrons la condition de l'équilibre, c'est-à-dire par suite la position d'équilibre en écrivant que la somme algébrique des projections de ces trois forces sur la tangente en M est nulle. Si l'on appelle F cette somme, comptée positivement dans le sens des arcs positifs, on obtient facilement

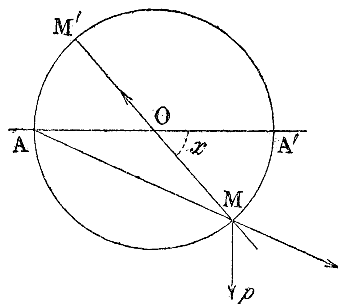


Fig. 58

$$F = p \cos x - \mu R \sin x, \qquad (12)$$

R désignant le rayon du cercle. La position d'équilibre sera donc définie par l'équation

$$p \cos x - \mu R \sin x = 0,$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tg} x = \frac{p}{\mu R}.$$

Il y a deux valeurs de x comprises entre 0 et 2π satisfaisant à cette équation, et si l'on appelle α la plus petite.

comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, l'autre est $\pi + \alpha$; il en résulte qu'il y a deux positions d'équilibre M et M′ diamétralement opposées.

Supposons que le point matériel soit abandonné à lui-même en n'importe quel point du cercle ; la force tangentielle qui produit le mouvement est donnée par l'équation (12) et peut être exprimée par l'une quelconque des égalités :

$$(13) \qquad F = \mu \text{ R Cos } x\,[tg\alpha - tgx],$$

$$(14) \qquad F = \mu \text{ R Cos } x\,[tg\,(\pi + \alpha) - tgx].$$

Supposons alors en premier lieu que le point matériel soit très voisin du point M, c'est-à-dire que a soit très voisin de α ; l'équation (13) montre que si x est inférieur à α, F est positive, tandis que si x est supérieur à α, F est négative. Il en résulte que si l'on écarte le point matériel de sa position d'équilibre M, correspondant à l'angle α, la force F tend à l'y ramener. Pour cette raison on dit que M est une *position d'équilibre stable*.

Supposons en second lieu que x soit très voisin de $\pi + \alpha$, c'est-à-dire que l'on écarte le point matériel de sa position d'équilibre M′ correspondant à l'angle $\pi + \alpha$. Comme le premier facteur de l'équation (14) est alors négatif, on voit que la force F est positive ou négative suivant que x est supérieur ou inférieur à $\pi + \alpha$; il en résulte que dans ce cas la force F tend à éloigner le point de sa position d'équilibre quand on l'en écarte légèrement ; on dit alors que M′ est une *une position d'équilibre instable*.

Il nous reste à calculer la réaction du cercle ou, ce qui revient au même, la pression du point sur le cercle, pression qui est égale et contraire à la réaction. Calculons la réaction N comptée positivement vers le centre du cercle. Pour cela, projetons les trois forces N, p et μ.AM sur le rayon MO ; il vient, en exprimant que la somme algébrique

des projections est nulle,

$$N - p \sin x - 2\mu R \cos^2 \frac{x}{2} = 0,$$

équation dans laquelle x est défini par la relation trouvée plus haut :

$$\operatorname{tg} x = \frac{p}{\mu R}.$$

On en conclut successivement

$$N = p \sin x + 2\mu R \cos^2 \frac{x}{2},$$

et

$$N = \mu R \pm \sqrt{p^2 + \mu^2 R^2},$$

le signe + convenant au point M et le signe — au point M′.

EXERCICES SUR LE LIVRE II

1. Étudier le mouvement d'un point matériel partant du repos et attiré par un point fixe en raison inverse du cube de la la distance.

(*Licence, 1860.*)

2. Étudier le mouvement d'un point matériel sollicité par une force proportionnelle à la racine carrée de la vitesse, et agissant dans la même direction que cette vitesse.

3. Un point matériel en mouvement sur une droite est animé d'une vitesse variable v ; montrer que si l'on appelle x son abscisse par rapport à une origine fixe sur cette droite, son accélération est égale à $v\frac{dv}{dx}$. En déduire la solution du problème suivant :

Un point matériel est placé en un point duquel émane une force répulsive proportionnelle à la puissance n de la distance. Déterminer la vitesse dont le mobile est animé lorsqu'il a parcouru un espace donné et le temps qu'il a mis à parcourir cet espace. (JULLIEN.)

4. Un point matériel mobile sur une droite OX est attiré par le point O en raison inverse de la puissance n de la distance. Déterminer n par la condition que la vitesse acquise par le mobile en venant vers le centre, d'une distance infinie à la distance a, soit égale à celle qu'il aurait acquise en venant de la distance a à la distance $\frac{a}{4}$. (JULLIEN.)

5. Un point matériel partant du repos est attiré par un point O proportionnellement à la puissance n de la distance. On connaît la vitesse quand le mobile arrive à la distance a du centre et l'on demande de trouver à quelle distance a du centre le mouvement a commencé.

6. Un point matériel partant du repos est attiré par un centre fixe en raison inverse du cube de la distance ; on connaît le point de départ et l'on demande le temps qu'il emploie pour arriver au centre d'attraction.

7. Un point matériel se meut sur une droite Ox et est attiré par le point O en raison inverse du cube de la distance. On suppose que le mobile arrive d'une distance infinie et l'on demande sa vitesse quand il est à une distance donnée a du point O.

8. Un mobile placé sur une droite $x'x$ est attiré par deux points A et B de cette droite proportionnellement à la distance ; déterminer la position du mobile à un instant quelconque et la durée d'une oscillation.

9. Mouvement vertical d'un point pesant abandonné sans vitesse initiale et repoussé verticalement par une force proportionnelle à la vitesse.

10. Mouvement vertical d'un point pesant abandonné sans vitesse initiale et repoussé verticalement par une force proportionnelle au carré de la vitesse.

11. Mouvement vertical d'un point pesant lancé de haut en bas avec une vitesse v_0 et repoussé verticalement par une force proportionnelle à la vitesse.

12. Même question en supposant le point repoussé par une force proportionnelle au carré de la vitesse.

13. Un projectile est lancé d'un point A avec une vitesse initiale v_0 faisant l'angle α avec l'horizon ; trouver le lieu des sommets et le lieu des foyers des paraboles décrites quand l'angle α varie.

14. Deux projectiles de même poids placés sur une horizontale à une distance d sont lancés simultanément dans le même plan vertical avec des vitesses a et a' dans des directions différentes ; trouver :

1° La condition pour qu'ils se rencontrent ;

2° Le point où ils se rencontrent et l'époque de leur rencontre ;
3° Le lieu des points de rencontre quand les inclinaisons varient.

15. Un point matériel pesant part d'un point donné A, dans le vide et avec une vitesse initiale donnée, dirigée de haut en bas ; il s'approche de l'horizon de quantités égales en des temps égaux et décrit une courbe située dans un plan vertical. Trouver l'équation de cette courbe.

16. Un point matériel pesant est lancé horizontalement d'un point A avec une vitesse initiale v_0 ; il décrit une courbe située dans le plan vertical qui contient cette vitesse et qui est telle que la projection horizontale de la vitesse reste constante et égale à v_0. Trouver cette courbe.

17. On considère toutes les droites qui partent du même point A de l'espace et dans toutes les directions. Chacune de ces droites est parcourue par un point pesant, et l'on suppose que tous ces points sont de même poids et sont abandonnés simultanément à eux-mêmes au point A. Trouver, au même instant, le lieu de leurs positions.

18. Même question en supposant que les mobiles, au lieu d'être pesants, sont attirés par le point A proportionnellement à la distance, et partent au même instant du point A sans vitesse initiale.

19. On donne une circonférence verticale, de rayon r, et un point A situé sur la partie de cette circonférence située au-dessus du diamètre horizontal. Un point pesant est abandonné à lui-même au point A et roule sur la partie convexe de la circonférence sous l'action de la pesanteur. On demande :
1° Le point où il quitte la circonférence ;
2° L'équation de la parabole qu'il décrit à partir de l'instant où il quitte la circonférence.

20. Même question en supposant que le point soit lancé du point le plus haut avec une vitesse initiale v_0 tangente au cercle.

21. Une surface de révolution autour d'un axe vertical Oz est définie par les équations de sa méridienne $z = \varphi(x)$, $y = 0$. On place un point matériel pesant, de masse m, en un point M de la méridienne, et on lui donne, suivant la tangente au parallèle correspondant, une vitesse telle qu'il décrit indéfiniment le parallèle. On demande :

1° L'expression de cette vitesse ;

2° Ce que doit être la surface de révolution pour que tous les parallèles soient décrits avec la même vitesse constante a ;

3° Ce que doit être cette surface pour que tous les parallèles soient décrits dans le même temps.

22. Un point matériel, de poids p, est attiré vers un point fixe O par une force constante F ; trouver les surfaces de niveau.

23. Un point matériel est sollicité par une force dont les composantes suivant les axes sont respectivement $ax + \alpha$, $by + \beta$, $cz + \gamma$, x, y et z désignant les coordonnées du point ; trouver les surfaces de niveau.

24. Dans un plan vertical on donne une droite verticale Oz, et l'on suppose qu'un point mobile dans ce plan soit repoussé par Oz proportionnellement à sa distance à cette droite ; trouver les courbes de niveau.

25. Trouver la trajectoire d'un point attiré vers un centre fixe proportionnellement à la distance, et trouver le lieu des trajectoires ainsi obtenues quand, la position et la vitesse initiale du mobile restant les mêmes, la direction de la vitesse initiale change.

26. Un point matériel décrit une ellipse sous l'action d'une force perpendiculaire au grand axe ; trouver l'expression de cette force.

27. Un point matériel décrit une cycloïde sous l'action d'une force parallèle à la base ; trouver cette force.

28. Un point matériel est attiré par une droite Ox proportionnellement à la distance et sa vitesse initiale est parallèle à Ox; trouver la position du mobile à un instant quelconque.

29. Un mobile partant du repos est soumis à l'action de deux forces : une force F, constante en grandeur et en direction, et une force répulsive émanant d'un centre fixe et proportionnelle à la distance ; trouver l'équation de la trajectoire.

30. Un projectile décrit une parabole ; trouver le lieu du point de rencontre des tangentes à la trajectoire aux points où les vitesses ont un produit constant.

31. Soient r et θ les coordonnées polaires d'un point prises par rapport à un point O et à un axe polaire Ox ; ce point décrit une courbe dont l'équation est $r = ae^{\theta}$, et le théorème des aires a lieu par rapport au point O. Trouver la loi de la force.

32. Un point matériel est soumis à l'action d'une force émanant d'un centre fixe, intersection de l'axe et de la directrice d'une parabole ; sachant qu'il parcourt la parabole, trouver la force.

33. L'équation, en coordonnées polaires, d'une lemniscate de Bernouilli est

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta}\,;$$

un point matériel décrit cette courbe sous l'action d'une force dirigée vers le point double de la trajectoire. Trouver l'expression de cette force et le temps employé à décrire une boucle de la lemniscate.

34. L'équation d'une courbe en coordonnées polaires est

$$r^m = a^m \cos m\theta\,;$$

un point matériel parcourt cette courbe sous l'action d'une force émanant du pôle ; trouver cette force.

Examiner les cas particuliers suivants : $m = 1$, $m = -2$ et $m = 2$.

35. Un point matériel décrit une cissoïde de Dioclès sous l'action d'une force émanant du point double ; trouver cette force.

36. Un point matériel décrit une trajectoire sous l'action d'une force émanant d'un centre fixe O et avec une vitesse inversement proportionnelle à la distance à ce point ; trouver la force et l'équation de la trajectoire.

37. Un point matériel décrit une hyperbole équilatère sous l'action d'une force émanant du centre de la courbe ; trouver cette force et la position du mobile sur sa trajectoire, à un instant quelconque.

38. Un point matériel décrit une circonférence sous l'action d'une force émanant d'un centre fixe placé sur la courbe ; trouver les expressions de la force et de la vitesse.

39. Position d'équilibre d'un point matériel attiré par n points fixes proportionnellement à la distance.

40. Position d'équilibre d'un point M, attiré vers les trois sommets d'un triangle par des forces constantes, proportionnelles aux côtés opposés.

41. Un point pesant est placé sur une ellipse dont le petit axe est vertical et exerce sur ce point une action répulsive horizontale proportionnelle à la distance du point à l'axe : position d'équilibre et pression correspondante.

42. Position d'équilibre d'un point pesant assujetti à rester sur une hélice dont l'axe est vertical ; un point de l'axe repousse le mobile en raison inverse du carré de la distance.

43. Position d'équilibre d'un point pesant assujetti à rester sur un ellipsoïde dont l'axe est vertical. Le point est attiré vers une extrémité de l'axe moyen par une force proportionnelle à la distance, et qui serait égale au poids du point s'il était au centre de la surface.

(Ces derniers exercices sont extraits du *Recueil d'exercices sur la mécanique rationnelle*, de M. A. de Saint-Germain.)

LIVRE III

STATIQUE

DU SOLIDE INVARIABLE LIBRE

La statique du solide invariable est traitée, suivant l'esprit du programme, dans les *Leçons de statique* de M. Carvallo. J'y renvoie donc le lecteur et je me borne, ici, à donner la détermination des centres de gravité, parce qu'elle n'est pas traitée dans le livre de M Carvallo.

DÉTERMINATION DES CENTRES DE GRAVITÉ

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS PRÉLIMINAIRES; THÉORÈMES GÉNÉRAUX

197. **Centre de gravité d'un corps.** — L'observation montre que tout corps abandonné à lui-même *tombe* suivant la verticale ; il est donc sollicité par une force agissant suivant la même direction : cette force s'appelle la *pesanteur*, et l'on dit qu'un corps est *pesant* pour exprimer qu'il est soumis à l'action de la pesanteur.

Cette action se manifeste d'ailleurs différemment suivant les cas : par la chute du corps si celui-ci est libre ; par la tension du fil s'il est suspendu à un fil ; par la pression qu'il exerce sur un autre corps quand il s'appuie sur lui. Elle s'exerce enfin sur tous également, quelles que petites qu'en soient les dimensions ; car, si un corps est partagé en autant de parties que l'on veut, toutes ces parties sont pesantes et tombent également vite dans le vide.

On est ainsi conduit à considérer un corps comme formé d'une infinité de points matériels sur chacun desquels s'exerce une force verticale, son poids. Si ses dimensions sont très petites par rapport à la terre, toutes ces forces verticales sont sensiblement parallèles et de même sens ; dès lors elles ont une résultante unique appliquée au centre

des forces parallèles. Cette résultante s'appelle le *poids* du corps et son point d'application le *centre de gravité*.

Le centre des forces parallèles est, comme on sait, indépendant de la direction commune des forces ; il ne dépend que de leurs points d'application et de leurs intensités ; il ne change pas quand on altère toutes les forces dans le même rapport. Dans le cas actuel, il est vrai, la direction des forces est fixe ; mais elle change avec l'orientation du corps dans l'espace par rapport à un observateur qui serait entraîné avec lui, tandis que la position du centre de gravité ne change pas. Ainsi, le centre de gravité est un point fixe du corps quelle que soit son orientation. Il est fixe également quand on déplace le corps à la surface de la terre, bien que les actions de la pesanteur sur ses diverses parties changent avec la latitude ; car elles sont toutes altérées dans le même rapport.

Supposons le corps rapporté à trois axes de coordonnées, et soient p_1, p_2, ... les poids des diverses parties de ce corps, appliqués respectivement aux points A_1, A_2, ... Appelons x_i, y_i, z_i les coordonnées du point A_i, x, y, z celles du centre de gravité G ; puisque le point G est le centre des forces parallèles p_1, p_2, ..., on a

$$(1) \qquad x = \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i}, \qquad y = \frac{\Sigma p_i y_i}{\Sigma p_i}, \qquad z = \frac{\Sigma p_i z_i}{\Sigma p_i}.$$

Ces formules se réduisent à deux si tous les points A_1, A_2, ... sont dans le même plan et sont rapportés à deux axes de ce plan ; elles se réduisent à une si tous les points sont en ligne droite, et si l'on prend cette droite pour axe des abscisses. Prises individuellement, elles font connaître la distance du centre de gravité à un plan quelconque parallèlement à une direction quelconque. Rappelons enfin, pour ne pas avoir à y revenir, qu'on les obtient en appliquant le théorème des moments par rapport à un plan au système des forces parallèles p_1, p_2, ... et à leur résultante.

198. **Détermination expérimentale du centre de gravité.** — Soit C (*fig.* 59) le corps ; on le suspend à un fil OA par un de ses points, A. Il est alors en équilibre sous l'action de deux forces, son poids P, appliqué au centre de gravité G, et la tension du fil, dirigée suivant AO ; donc le prolongement AB de OA passe par G. Imaginons qu'on marque cette direction dans le corps, puis suspendons-le par un autre point A_1 : nous obtiendrons une nouvelle direction A_1B_1 passant également par le point G ; ce point sera ainsi défini par l'intersection de deux directions AB et A_1B_1 marquées dans le corps.

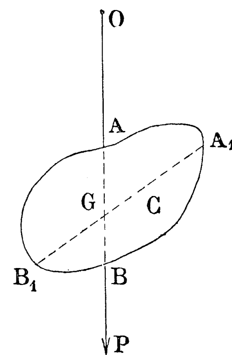


Fig. 59

199. Remarques. — 1° Dans la pratique on ne peut pas marquer les directions AB et A_1B_1 dans le corps ; mais l'expérience précédente fournit en général des renseignements suffisants sur la position du centre de gravité.

2° Dans tout ce qui suit on traitera du centre de gravité, non des corps, mais des volumes, des surfaces et des lignes.

200. **Définitions.** — On dit qu'un corps est *homogène* quand les poids de ses différentes parties sont proportionnels à leurs volumes. Tout corps qui ne satisfait pas à cette condition est dit *hétérogène*.

On appelle *centre de gravité d'un volume* celui d'un corps homogène qui remplirait ce volume ;

Centre de gravité d'une surface, celui d'une couche d'épaisseur constante et infiniment petite d'un corps homogène répandu sur cette surface ;

Centre de gravité d'une ligne, celui d'un corps homogène

ayant la forme d'un tube de section constante et infiniment petite et qui aurait pour axe cette ligne.

Ainsi, pour concevoir le centre de gravité d'un volume, d'une surface ou d'une ligne, on peut imaginer qu'à chaque élément est appliqué un poids proportionnel à son volume, sa surface ou sa longueur ; le point d'application de la résultante de tous ces poids est le centre de gravité du volume, de la surface ou de la ligne. Nous conviendrons d'ailleurs une fois pour toutes de mesurer ces poids par les mêmes nombres que les éléments auxquels ils se rapportent.

Appelons x_i, y_i, z_i les coordonnées d'un élément de poids p_i rapporté à trois axes de coordonnées ; les coordonnées du centre de gravité sont données par les formules (1) du numéro 197 ; de sorte que la détermination analytique de ce point est ramenée au calcul de quatre intégrales définies, dont l'une Σp_i est toute déterminée si l'on sait mesurer le volume, la surface ou la ligne dont on cherche le centre de gravité.

201. **Définitions**. — Nous renverrons aux ouvrages de géométrie élémentaire pour l'étude de *deux* figures symétriques par rapport à un point, à un axe ou à un plan ; rappelons toutefois que, dans deux figures symétriques, les lignes, les surfaces et les volumes correspondants ont des *mesures* égales.

On dit qu'*une* figure est symétrique par rapport à un centre, à un axe ou à un plan, lorsque ses points sont deux à deux symétriques par rapport à ce point, cet axe ou ce plan.

202. **Théorème**. — *Si une figure quelconque, volume, surface, ligne ou ensemble de points a un centre, un axe ou un plan de symétrie, son centre de gravité est en ce centre, sur cet axe ou dans ce plan.*

En effet, on peut décomposer la figure en éléments deux à deux symétriques et équivalents; par suite, les poids de deux éléments symétriques sont égaux et le point d'application de leur résultante est au milieu de la droite qui les joint, c'est-à-dire au centre, sur l'axe ou dans le plan de symétrie. Le point d'application de la résultante totale, c'est-à-dire le centre de gravité, satisfait donc aussi à la même condition.

D'après cela, le centre de gravité d'une portion de droite est au milieu de cette portion de droite; celui d'un parallélogramme coïncide avec le centre du parallélogramme, etc.

Pour généraliser ce théorème, nous allons d'abord donner quelques notions qui ne se trouvent pas habituellement dans les cours de géométrie.

203. **Définitions.** — On dit qu'une droite est un *diamètre* d'une figure plane, si les points de cette figure peuvent être groupés deux à deux de manière que les droites qui joignent des points correspondants soient parallèles et coupées en leurs milieux par la droite.

On dit de même qu'un plan est un *plan diamétral* d'une figure, si les points de cette figure peuvent être groupés deux à deux de façon que les droites qui joignent des points correspondants soient parallèles et coupées en leurs milieux par le plan.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les deux propositions suivantes [1] :

1° *Si une figure plane a un diamètre, des portions de surfaces correspondantes sont équivalentes;*

2° *Si une figure a un plan diamétral, deux volumes correspondants sont équivalents.*

Ces deux propositions sont indispensables pour démontrer en toute rigueur le théorème suivant :

---

(1) Elles m'ont été communiquées par M. Carvallo. On en trouvera d'ailleurs la démonstration dans une note placée à la fin de l'ouvrage.

204. **Théorème.** (Extension du théorème numéro 202.) — *Si une aire plane admet un diamètre, si un volume admet un plan diamétral, le centre de gravité de cette aire ou de ce volume est sur le diamètre ou dans le plan diamétral.*

En effet, l'aire plane, par exemple, peut être décomposée en éléments correspondants; les poids de deux éléments correspondants étant égaux, le point d'application de leur résultante est au milieu de la droite qui les joint, c'est-à-dire sur le diamètre; donc le point d'application de la résultante totale, c'est-à-dire le centre de gravité de l'aire plane, est aussi sur ce diamètre.

On raisonnerait de même dans le cas du plan diamétral.

205. Remarque I. — Le centre de gravité d'une ligne qui a un diamètre n'est pas forcément sur ce diamètre, parce que les éléments correspondants n'ayant pas en général même longueur, le raisonnement précédent est en défaut. Ainsi on verra plus loin (212) que le centre de gravité de l'aire d'un triangle est sur une médiane parce qu'une médiane est un diamètre de ce triangle, tandis que le centre de gravité du périmètre n'y est pas (207).

De même le centre de gravité d'une surface qui a un plan diamétral n'est pas nécessairement dans ce plan.

206. Remarque II. — Les deux propositions suivantes peuvent être regardées comme évidentes :

1° *Si tous les points d'une ligne ou d'une aire planes décrivent des droites égales et parallèles, le centre de gravité décrit une droite égale et parallèle aux premières ;*

2° *Les centres de gravité des lignes ou des aires planes homothétiques à une ligne ou à une aire données sont distribués sur la même droite passant par le centre d'homothétie.*

CHAPITRE II

CENTRES DE GRAVITÉ DE LIGNES

207. **Contour d'un triangle. — Théorème.** — *Le centre de gravité du contour d'un triangle est le point de rencontre des bissectrices du triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du premier.*

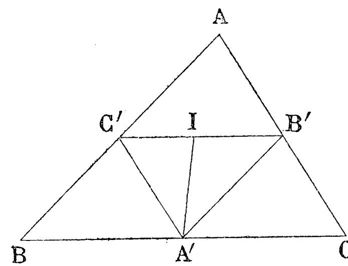


Fig. 60

Soit le triangle ABC (*fig.* 60) ; le centre de gravité du contour de ce triangle s'obtient en composant trois forces parallèles et de même sens, égales aux côtés a, b, c et appliquées respectivement en leurs milieux A', B', C'. La résultante des deux forces b et c est une force $b+c$ appliquée en un point I situé entre B' et C' et tel que l'on ait

$$\frac{\mathrm{C'I}}{\mathrm{IB'}} = \frac{b}{c} = \frac{2\mathrm{A'C'}}{2\mathrm{A'B'}},$$

ou

$$\frac{\mathrm{C'I}}{\mathrm{IB'}} = \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{A'B'}}.$$

Il suit de là que le point I est sur la bissectrice de l'an-

gle B′A′C′ ; mais alors le centre de gravité, qui s'obtient en composant les deux forces a et $b+c$, est lui-même sur cette bissectrice ; il en résulte qu'il est à l'intersection des trois bissectrices.

208. **Corollaire.** — *Les bissectrices d'un triangle concourent en un même point.*

209. **Contour polygonal régulier.** — **Théorème.** — *Le centre de gravité d'une ligne brisée régulière convexe est sur le rayon moyen, à une distance du centre égale à la quatrième proportionnelle entre le périmètre, la corde et l'apothème.*

Soient A et M (*fig.* 61) les extrémités de la ligne brisée régulière de centre O et de rayon R ; désignons par c la corde AM, par L le périmètre de la ligne brisée et soit Ox le rayon moyen. Le centre de gravité se trouve évidemment sur Ox (n° 202), et on l'obtient en composant des forces parallèles, égales aux côtés de la ligne brisée, et appliquées en leurs milieux. Rapportons alors la figure aux deux axes rectangulaires Ox et Oy, et, par le milieu I d'un côté quelconque, AB par exemple, menons II′ perpendiculaire à Ox.

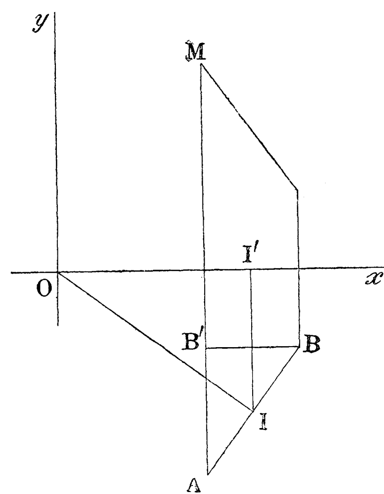


Fig. 61

En appelant x l'abscisse du centre de gravité, on a (197).

$$x = \frac{\Sigma AB.II'}{\Sigma AB} = \frac{\Sigma AB.II'}{L}.$$

Menons BB′ et AB′ respectivement parallèles à Ox et à Oy ; les deux triangles semblables ABB′, OII′ donnent

$$\frac{AB}{OI} = \frac{AB'}{II'},$$

d'où

$$AB.II' = AB'.OI ;$$

or, OI est l'apothème a de la ligne brisée, AB′ est la projection de AB sur Oy ; on aura donc

$$x = \frac{a\Sigma \text{ proj. } AB}{L} ;$$

mais d'autre part

$$\Sigma \text{ proj. } AB = c ;$$

il vient donc finalement

$$x = \frac{a.c}{L}.$$

210. Arc de cercle. Théorème. — *Le centre de gravité d'un arc de cercle est sur le rayon moyen, à une distance du centre égale à la quatrième proportionnelle entre l'arc, la corde et le rayon.*

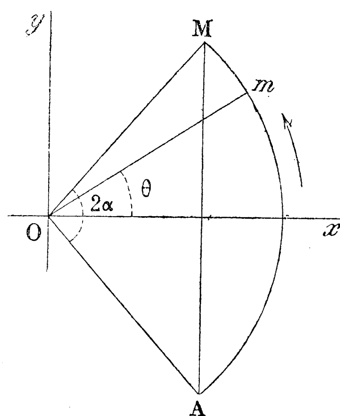


Fig. 62

Soit l'arc de cercle AOM (*fig.* 62) de centre O et de rayon R, et soit

$$\widehat{AOM} = 2\alpha.$$

Rapportons la figure au rayon moyen Ox et à la perpendiculaire Oy ; le centre de gravité sera évidemment sur Ox. Pour obtenir son abscisse ξ décomposons l'arc $AM = L$ en

éléments infiniment petits dS d'abscisse x, on aura

$$\xi = \frac{\int_0^L x dS}{L}.$$

Or, soient m un point quelconque de l'arc et θ l'angle xom, compté positivement dans le sens de la flèche ; on a

$$x = R \cos \theta \qquad \text{et} \qquad dS = R d\theta ;$$

donc

$$\int_0^L x dS = \int_{-\alpha}^{+\alpha} R^2 \cos \theta \, d\theta = 2R^2 \sin \alpha ,$$

et par suite

$$\xi = \frac{2R^2 \sin \alpha}{L} ;$$

mais si l'on appelle c la longueur de la corde AM, on a

$$c = 2R \sin \alpha ;$$

donc enfin

$$\xi = \frac{Rc}{L}.$$

211. Remarque. — On aurait pu établir cette proposition en considérant l'arc comme la limite d'une ligne brisée régulière inscrite dont on augmente indéfiniment le nombre des côtés de manière que chaque côté tende vers zéro.

CHAPITRE III

CENTRES DE GRAVITÉ DE SURFACES

212. **Triangle.** — **Théorème.** — *Le centre de gravité de l'aire d'un triangle est au point de concours des médianes.*

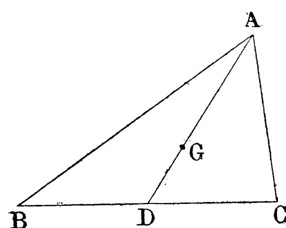


Fig. 63

Soit le triangle ABC (*fig.* 63). Une médiane quelconque, AD par exemple, est un diamètre pour les cordes parallèles à BC ; donc le centre de gravité est sur cette médiane, et par suite il est à l'intersection des médianes.

213. **Corollaire.** — *Les trois médianes d'un triangle concourent en un même point.*

214. **Théorème.** — *Le centre de gravité d'un triangle est le centre des moyennes distances de ses trois sommets.*

Cherchons en effet le point d'application de la résultante de trois poids égaux à P appliqués en A, B et C (*fig.* 63). Il faut pour cela composer d'abord les poids appliqués en B et C, ce qui donne un poids 2P appliqué au point D ; il reste ensuite à composer ce poids 2P avec le poids P appliqué en A, ce qui montre que le point d'application de la résultante, c'est-à-dire le centre des moyennes distances est

situé sur la médiane AD; il est donc à l'intersection des médianes et coïncide avec le centre de gravité.

215. Remarque. — Soit G le centre de gravité; puisqu'il est le point d'application de la résultante des poids 2P et P, appliqués en D et A, on a

$$\frac{GD}{GA} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$GD = \frac{1}{3} AD.$$

216. **Corollaire.** — *Les médianes d'un triangle se coupent au tiers de chacune d'elles à partir de la base.*

217. **Quadrilatère.** — Soit le quadrilatère ABCD (*fig.* 64). En décomposant d'abord le quadrilatère en deux triangles

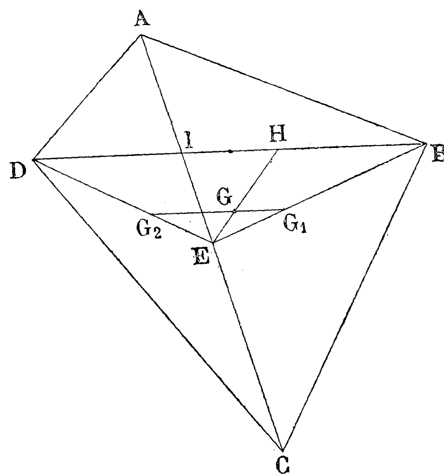


Fig. 64

ABC et ADC, on voit que le centre de gravité du quadrilatère se trouve sur la ligne G_1G_2 qui joint les centres de gravité

de ces deux triangles. On voit de la même manière qu'il se trouve sur la ligne qui joint les centres de gravité des deux triangles ABD et BCD; par conséquent, il est à l'intersection de ces deux lignes.

Autrement: soit G le centre de gravité cherché sur la ligne G_1G_2. Représentons par ABC le poids du triangle ABC et par ADC celui du triangle ADC; on doit avoir

$$\frac{G_1G}{GG_2} = \frac{ADC}{ABC}.$$

Mais le second rapport est évidemment égal à $\frac{DI}{BI}$. Si donc on prend $BH = DI$, on aura $DH = BI$ et

$$\frac{G_1G}{GG_2} = \frac{BH}{HD};$$

comme G_1G_2 est parallèle à BD, il en résulte que le point G est à l'intersection des deux lignes EH et G_1G_2.

218. **Trapèze.** — Soit le trapèze ABCD (*fig.* 65). En le décomposant en deux triangles ABC et ADC on voit que le centre de gravité cherché est sur la ligne G_1G_2 qui joint les centres de gravité de ces deux triangles; mais il se trouve aussi sur la ligne EF qui joint les milieux des côtés parallèles, parce que cette ligne est un diamètre pour les cordes parallèles à ces côtés; il est donc à l'intersection G de ces deux lignes.

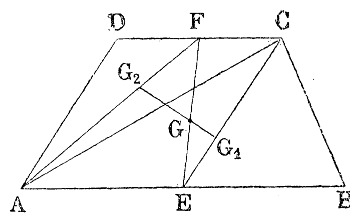


Fig. 65

219. Remarque I. — On pourrait, bien entendu, obtenir le centre de gravité du trapèze en procédant comme pour un quadrilatère quelconque.

220. Remarque II. — On peut aussi obtenir le centre de gravité du trapèze en déterminant le rapport $\frac{GE}{GF}$. Pour cela, appelons a et b les bases AB et CD du trapèze et représentons par ABC, ACD les poids des triangles ABC et ACD mesurés par les surfaces des mêmes triangles. Considérons enfin le poids du trapèze appliqué en G comme la résultante des poids des triangles ABC, ADC appliqués respectivement en G_1 et G_2, et appliquons à ces trois forces parallèles le théorème des moments par rapport à un plan.

En prenant d'abord les moments parallèlement à EF par rapport à un plan passant par AB, on a

$$ABCD \times GE = ABC \times \frac{EF}{3} + ADC \times \frac{2EF}{3};$$

en prenant ensuite les moments parallèlement à la même direction par rapport à un plan passant par CD, on a de même

$$ABCD \times GF = ABC \times \frac{2EF}{3} + ADC \times \frac{EF}{3}.$$

On en déduit par division

$$\frac{GE}{GF} = \frac{ABC + 2ADC}{2ABC + ADC};$$

mais si l'on appelle h la hauteur du trapèze, on a

$$ABC = \frac{ah}{2}, \qquad ADC = \frac{bh}{2};$$

et l'égalité précédente peut s'écrire

$$\frac{GE}{GF} = \frac{h(a+2b)}{h(2a+b)} = \frac{a+2b}{2a+b}.$$

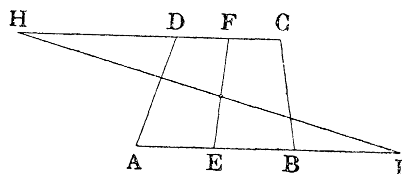


Fig. 66

On déduit de là une nouvelle manière de déterminer le point G. On porte BI = DC, DH = AB (*fig.* 66) ; la droite IH rencontre EF au

point G cherché. On a en effet

$$\frac{GE}{GF} = \frac{EI}{FH} = \frac{\frac{a}{2}+b}{a+\frac{b}{2}} = \frac{a+2b}{2a+b}.$$

221. **Secteur polygonal régulier. — Théorème.** — *Le centre de gravité de l'aire d'un secteur polygonal régulier est sur le rayon moyen, à une distance du centre égale aux deux tiers de la quatrième proportionnelle entre le périmètre, la corde et l'apothème.*

Soit OABCD (*fig.* 67) le secteur polygonal régulier. Décomposons-le en triangles AOB, BOC,... et construisons la ligne brisée A'B'C'D' telle que

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = \frac{2}{3}.$$

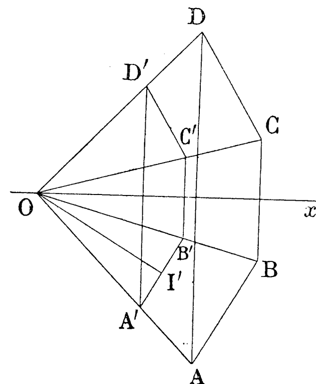


Fig. 67

Les poids des divers triangles AOB, BOC,... qui composent le secteur sont évidemment proportionnels aux côtés A'B', B'C',... et appliqués en leurs milieux. Le point d'application de leur résultante, c'est-à-dire le centre de gravité cherché, coïncide donc avec celui de la ligne brisée A'B'C'D'.

Soit alors Ox le rayon moyen et I' le milieu d'un côté, A'B' par exemple; en appelant ξ l'abscisse du centre de gravité sur le rayon moyen, on a (209)

$$\xi = OI' \times \frac{\text{corde } A'D'}{L'},$$

L′ désignant le périmètre de la ligne brisée A′B′C′D′ ; mais si l'on appelle a l'apothème de la ligne brisée ABCD, L son périmètre et c la corde AD, on a

$$OI' = \frac{2}{3} a \qquad \text{et} \qquad \frac{\text{corde } A'D'}{L'} = \frac{c}{L};$$

donc

$$\xi = \frac{2}{3} \frac{a.c}{L}.$$

222. Remarque. — Le centre de gravité d'une aire polygonale quelconque s'obtient en la décomposant en triangles.

223. **Secteur circulaire**. — **Théorème.** — *Le centre de gravité d'un secteur circulaire est sur le rayon moyen, à une distance du centre égale aux deux tiers de la quatrième proportionnelle entre l'arc, la corde et le rayon.*

Soit le secteur circulaire AOB (*fig.* 68), de centre O et de rayon R ; soient Ox le rayon moyen, c la corde AB et L l'arc AB. Pour obtenir le centre de gravité de ce secteur, décomposons-le en secteurs infiniment petits par des rayons OC, OD,.. Un quelconque de ces secteurs, COD par exemple, peut être assimilé à un triangle, car on peut considérer l'arc CD comme confondu avec sa corde ; son centre de gravité sera donc sur la bissectrice de l'angle COD, à une distance du centre

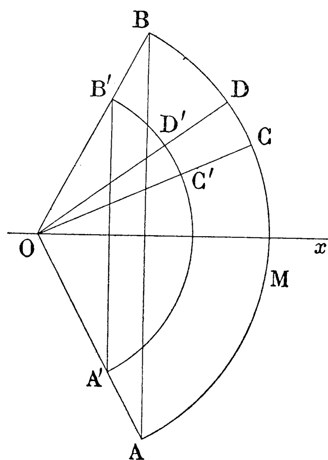


Fig. 68

égale aux deux tiers du rayon ; son poids, qui est égal à sa surface (200), est proportionnel à l'arc CD, ou encore proportionnel à l'arc C'D' de rayon $R' = \frac{2}{3} R$. Il suit évidemment de là que le centre de gravité du secteur AOB coïncide avec celui de l'arc A'B' de rayon R' ; mais celui-ci se trouve sur Ox, et son abscisse ξ est donnée par la formule

$$\xi = R' \frac{\text{corde A'B'}}{\text{arc A'B'}}.$$

On a donc

$$\xi = \frac{2}{3} \cdot \frac{Rc}{L}.$$

224. Remarque I. — On aurait pu obtenir le centre de gravité du secteur circulaire en le considérant comme la limite d'un secteur polygonal régulier inscrit.

225. Remarque II. — Pour obtenir le centre de gravité d'un segment de cercle AMB (*fig.* 68), on considère le poids du secteur circulaire AOB comme la résultante des poids du segment AMB et du triangle AOB ; puis on applique à ces trois forces le théorème des moments par rapport à un plan, ou, ce qui revient au même, les formules (1) du numéro 197.

CHAPITRE IV

GENTRES DE GRAVITÉ DE VOLUMES

226. Prisme. — Théorème. — *Le centre de gravité d'un prisme triangulaire est au milieu de la ligne qui joint les centres de gravité des bases.*

Soit le prisme triangulaire ABCA'B'C' (*fig.* 69). Son centre de gravité est évidemment dans le plan $A_1B_1C_1$ équidistant des deux bases, parce que ce plan est un plan diamétral pour les cordes parallèles aux arêtes. D'autre part, le plan qui passe par l'arête AA' et par les milieux I et I' des arêtes BC, B'C' est aussi un plan diamétral pour les cordes parallèles à BC ; donc le centre de gravité est dans ce plan. On voit de même qu'il est dans les deux autres plans médians et par suite qu'il est sur l'intersection de ces plans. Or, AI et A'I' étant les médianes des bases, l'intersection des trois plans est la ligne qui joint les

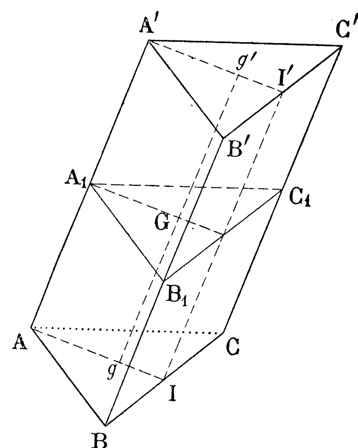


Fig. 69

centres de gravité des deux bases ; donc enfin le centre de gravité est au milieu de cette ligne.

227. **Corollaire.** — Soient g et g' les centres de gravité des bases ; le point de rencontre de gg' avec le plan $A_1B_1C_1$ est le centre de gravité du triangle $A_1B_1C_1$; donc *le centre de gravité d'un prisme triangulaire coïncide avec le centre de de gravité de la section moyenne.*

228. **Théorème.** — *Le centre de gravité d'un prisme quelconque est au milieu de la ligne qui joint les centres de gravité des bases.*

Soit le prisme ABCDEA'B'C'D'E' (*fig.* 70). Décomposons-le en prismes triangulaires par des plans diagonaux AA'CC', AA'DD', etc., et soient g_1, g_2, etc., les centres de gravité de ces prismes situés (226) dans le plan moyen $A_1B_1C_1D_1E_1$. Appliquons aux points g_1, g_2, etc., des poids proportionnels à ceux des prismes correspondants; on peut considérer ces prismes comme ayant même hauteur et pour bases respectives les triangles $A_1B_1C_1$, $A_1C_1D_1$, etc. ; leurs poids sont donc proportionnels aux aires de ces triangles. D'autre part, les points g_1, g_2, etc., sont les centres de gravité des mêmes triangles ; il en résulte que le centre de gravité cherché coïncide avec celui du po-

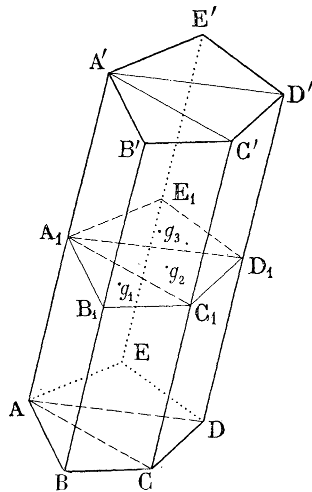


Fig. 70

lygone $A_1B_1C_1D_1E_1$, c'est-à-dire avec le milieu de la ligne qui joint les centres de gravité des bases.

229. **Cylindre.** — **Théorème.** — *Le centre de gravité d'un cylindre est au milieu de la ligne qui joint les centres de gravité des bases.*

On peut, en effet, considérer le volume d'un cylindre comme la limite du volume d'un prisme inscrit dont on augmente indéfiniment le nombre des côtés de la base de manière que chaque côté tende vers zéro.

230. **Pyramide.** — **Théorème.** — *Le centre de gravité d'un tétraèdre est à l'intersection des six plans déterminés par chaque arête et le milieu de l'arête opposée.*

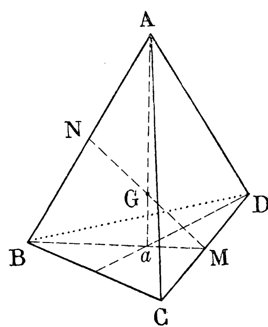


Fig. 71

Soit le tétraèdre ABCD (*fig.* 71); le plan ABM mené par l'arête AB et par le milieu M de l'arête opposée CD est un plan diamétral pour les cordes parallèles à CD; le centre de gravité du tétraèdre est donc dans ce plan, et par suite à l'intersection G des six plans déterminés par chaque arête et le milieu de l'arête opposée.

231. Remarques. — 1° Les plans ABG, CDG passent tous deux par le point G et par les milieux M et N des arêtes AB et CD; les trois points M, N, G sont donc en ligne droite. Il en résulte que le centre de gravité du tétraèdre est à l'intersection des lignes qui joignent les milieux des arêtes opposées.

2° Le plan ABM passe évidemment par le point a, centre

de gravité du triangle BCD; comme il passe aussi par le point A, on voit que le centre de gravité d'un tétraèdre est à l'intersection des lignes qui joignent les sommets aux centres de gravité des faces opposées.

232. **Corollaire.** — *Les six plans menés par chaque arête et les milieux des arêtes opposées, les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées et les quatre droites joignant les sommets aux centres de gravité des faces opposées, concourent en un même point qui est le centre de gravité du tétraèdre.*

233. **Théorème.** — *Le centre de gravité d'un tétraèdre coïncide avec le centre des moyennes distances des quatre sommets.*

En effet, le centre des moyennes distances des quatre sommets est sur la droite Aa qui joint le point A au centre des moyennes distances de la base BCD; il est donc sur les quatre droites joignant les sommets aux centres de gravité des faces opposées; par suite, il coïncide avec le point G.

234. Remarques. — 1° Il suit du théorème précédent que l'on a

$$\frac{\mathrm{G}a}{\mathrm{GA}} = \frac{1}{3},$$

d'où

$$\mathrm{G}a = \frac{\mathrm{A}a}{4};$$

donc *le centre de gravité d'un tétraèdre est sur la ligne qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée et au quart de cette ligne à partir de la base.*

2° On peut considérer le point G comme l'intersection de Aa avec le plan P parallèle à celui de la face BCD mené au quart de la hauteur à partir de cette face; il coïncide ainsi avec le centre de gravité de la section de la pyramide par le plan P.

Ce dernier résultat est généralisé dans le théorème suivant.

235. Théorème. — *Le centre de gravité d'une pyramide est au centre de gravité de la section faite dans la pyramide par un plan parallèle à la base et mené au quart de la hauteur à partir de la base.*

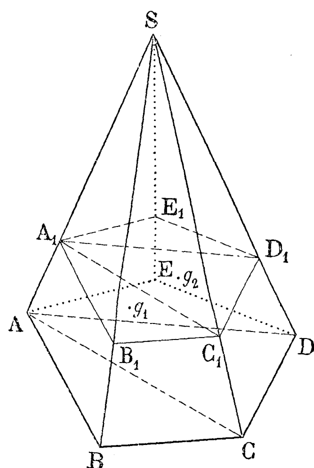


Fig. 72

Soit la pyramide SABCDE (*fig.* 72), et soit $A_1B_1C_1D_1E_1$ la section faite par le plan parallèle à la base et mené au quart de la hauteur à partir de cette base. Décomposons cette pyramide en tétraèdres par les plans diagonaux SAC, SAD, etc.; les centres de gravité g_1, g_2, etc. de ces tétraèdres coïncident (nº 234) avec ceux des triangles $A_1B_1C_1$, $A_1C_1D_1$, etc. D'ailleurs les pyramides ayant même hauteur, leurs poids sont proportionnels aux bases, et par suite aux aires des triangles $A_1B_1C_1$, $A_1C_1D_1$, etc.; il suit évidemment de là que le centre de gravité de la pyramide coïncide avec celui du polygone $A_1B_1C_1D_1E_1$.

236. Remarque. — Le centre de gravité d'un polyèdre s'obtient en décomposant le polyèdre en tétraèdres.

237. Cône. — Théorème. — *Le centre de gravité d'un cône coïncide avec le centre de la section faite dans le cône par un plan parallèle à la base mené au quart de la hauteur à partir de la base.*

En effet, on peut considérer le volume du cône comme la limite du volume d'une pyramide inscrite dont on augmente indéfiniment le nombre des côtés de la base de manière que chaque côté tende vers zéro.

CHAPITRE V

APPLICATIONS DES CENTRES DE GRAVITÉ ; THÉORÈMES DE GULDIN

238. **Théorème.** — *Le centre de gravité de la projection d'une aire plane* A *sur un plan* P *coïncide avec la projection du centre de gravité de l'aire* A.

Supposons d'abord les projections orthogonales, et soit A′ (*fig.* 73) la projection de A sur le plan P. Soient, d'autre part, G le centre de gravité de l'aire A, G′ celui de l'aire A′. Nous allons montrer que ces deux points sont à la même distance d'un plan quelconque Q perpendiculaire au plan P, ce qui prouvera évidemment que le point G′ est la projection du point G ;

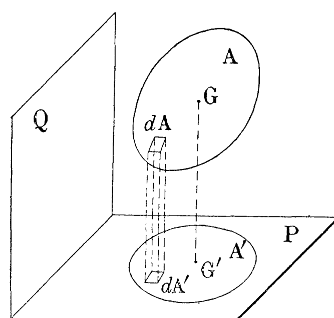


Fig. 73

Pour démontrer que les points G et G′ sont à la même distance du plan Q, décomposons l'aire A en éléments infiniment petits dA projetés en dA' ; appelons x la distance de l'élément dA au plan Q, ξ celle du point G au même plan. En appliquant les formules (1) du numéro 197, on a

$$A\xi = \Sigma\, x dA ; \tag{1}$$

on aurait de même pour A′

$$(2) \qquad A'\xi' = \Sigma\, x dA',$$

ξ' désignant la distance du point G′ au plan Q. Or, soit α l'angle que fait le plan de l'aire A avec le plan P ; on sait que

$$A' = A \cos\alpha, \qquad dA' = dA.\cos\alpha;$$

l'égalité (2) peut donc s'écrire

$$A\xi' \cos\alpha = \cos\alpha\, \Sigma\, x dA,$$

c'est-à-dire, en vertu de (1),

$$A\xi' = A\xi,$$

d'où

$$\xi' = \xi.$$

Supposons maintenant les projections quelconques ; appelons toujours P le plan de projection, A l'aire projetée et A′ l'aire de la projection. Menons un plan quelconque P′ perpendiculaire à la direction des projetantes et soient A la projection commune de A et de A′ sur le plan P′, G_1 le centre de gravité de A ; en vertu de la première partie du raisonnement, les centres de gravité G et G′ des aires A et A′ sont projetés orthogonalement en G_1 ; donc la ligne GG′ est parallèle à la direction des projetantes, ce qui revient à dire que G′ est la projection de G sur le plan P.

239. **Corollaire.** — *Les centres de gravité des sections planes d'une surface prismatique ou cylindrique sont tous sur une même parallèle aux arêtes.*

Car on peut les considérer comme étant les projections du même point sur des plans différents parallèlement à la direction des arêtes.

240. **Théorème.** — *Le volume d'un cylindre ou d'un prisme tronqué est égal au produit de la section droite par la distance des centres de gravité des bases.*

Démontrons la proposition pour un cylindre tronqué ABA′B′ (*fig.* 74). Soit A_1B_1 la section déterminée par un plan P perpendiculaire aux arêtes ; en appelant V le volume total, on a

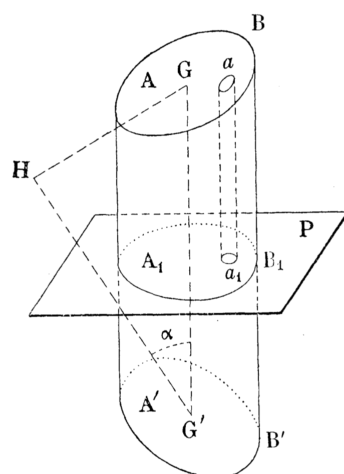


Fig. 74

$$V = \text{Vol. } A_1B_1AB + \text{Vol. } A_1B_1A'B'.$$

Évaluons d'abord Vol. A_1B_1AB ; pour cela supposons-le décomposé en cylindres tronqués infiniment petits tels que a_1a. Si l'on appelle z la distance au plan P du centre de gravité de l'élément de surface a, le volume du cylindre tronqué a_1a est, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, équivalent à celui du cylindre droit qui aurait pour base a_1 et pour hauteur z ; on a donc

$$\text{Vol. } A_1B_1AB = \text{Lim } \Sigma\, a_1z.$$

D'autre part, l'élément de surface a_1, étant la projection de l'élément a sur le plan P, si l'on appelle α l'angle que fait le plan de la base supérieure avec le plan P, on a

$$a_1 = a \cos \alpha,$$

et par suite

$$\text{Vol. } A_1B_1AB = \text{Lim } \Sigma az \cos \alpha = \cos \alpha . \text{ Lim } \Sigma az ;$$

or, soient G le centre de gravité de la base supérieure, A l'aire de cette base et ζ la distance du point G au plan P ; on a (197)

$$A\zeta = \text{Lim } \Sigma az ;$$

donc

$$\text{Vol. } A_1B_1AB = \zeta A \cos \alpha = A_1\zeta,$$

A_1 désignant l'aire de la section droite.

En appelant ζ' la distance du plan P au point G' centre de gravité de la base inférieure, on a de même

$$\text{Vol. } A_1B_1A'B' = A\zeta',$$

et par suite

$$V = A_1(\zeta + \zeta');$$

de sorte que si l'on appelle Z la distance GG', on a finalement

$$V = A_1.Z.$$

Le raisonnement serait le même pour le prisme tronqué.

241. Corollaire. — *Le volume d'un cylindre ou d'un prisme tronqué est égal au produit de l'une des bases par la distance à celle-ci du centre de gravité de l'autre.*

Menons en effet par le point G' (*fig.* 74) la perpendiculaire G'H sur le plan de la base supérieure ; l'angle de G'H avec G'G étant égal à l'angle α, on a

$$G'H = GG' \cos\alpha = Z \cos\alpha,$$

et d'autre part

$$A_1 = A \cos\alpha;$$

donc

$$V = A \cos\alpha \cdot \frac{G'H}{\cos\alpha} = A.G'H.$$

242. Théorème. — *L'aire engendrée par une ligne plane exécutant une révolution complète autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de cette ligne par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

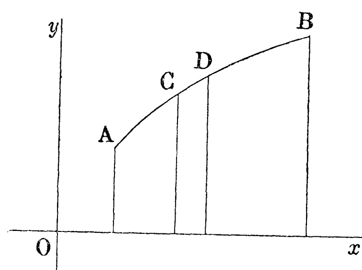


Fig. 75

Prenons pour axe des x l'axe de révolution et pour axe des y une perpendiculaire au premier menée dans le plan de la figure. Soit alors AB (*fig.* 75) la ligne

que je suppose décomposée en éléments infiniment petits tels que $CD = dS$; l'aire infiniment petite engendrée par cet élément peut être assimilée à l'aire latérale d'un tronc de cône, de sorte que si y et $y + \Delta y$ sont les ordonnées des points C et D, l'expression de l'aire engendrée est

$$\pi \frac{2y + \Delta y}{2} dS.$$

La partie principale de cet infiniment petit est

$$\pi y dS.$$

Comptons les arcs à partir du point A, positivement dans le sens de A vers B ; l'aire totale engendrée A a pour expression

$$A = \pi \int_0^L y dS ;$$

mais l'intégrale définie $\int_0^L y dS$ représente le moment de l'arc AB parallèlement à Oy par rapport à un plan passant par Ox ; si donc L est la longueur de l'arc et Y l'ordonnée de son centre de gravité, on a

$$\int_0^L y dS = L.Y,$$

et par suite

$$A = 2\pi Y.L.$$

243. Remarque I. — La démonstration suppose qu'une ordonnée quelconque ne rencontre l'arc AB qu'en un seul point ; toutefois la proposition s'applique à tous les cas, pourvu bien entendu que l'axe de révolution ne traverse pas la courbe.

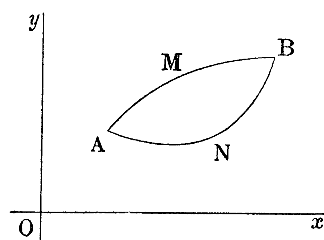


Fig. 76

Pour le démontrer, considérons une ligne formée de deux

arcs AMB, ANB (*fig.* 76), de longueurs respectives L_1 et L_2; soient y_1 et y_2 les ordonnées de leurs centres de gravité, A_1, A_2 les aires engendrées par ces arcs, A l'aire totale ; on a, en vertu du numéro précédent,

$$A_1 = 2\pi L_1 y_1, \qquad A_2 = 2\pi L_2 y_2.$$

D'autre part,

$$A = A_1 + A_2 = 2\pi(L_1 y_1 + L_2 y_2);$$

or, si L est la longueur totale des deux arcs AMB, ANB, Y l'ordonnée du centre de gravité de l'ensemble de ces arcs, on a aussi

$$L_1 y_1 + L_2 y_2 = LY;$$

on en conclut

$$A = 2\pi Y.L.$$

244. Remarque II. — Si, au lieu de faire une révolution complète, la ligne ne tourne que d'un angle α, l'aire engendrée A a pour expression

$$A = 2\pi YL.\frac{\alpha}{360}.$$

245. **Théorème.** — *Le volume engendré par une aire plane exécutant une révolution complète autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas, est égal au produit de cette aire par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

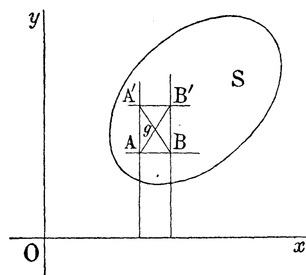


Fig. 77

Soit S (*fig.* 77) l'aire plane ; prenons comme axe des x l'axe de révolution et comme axe des y une perpendiculaire à l'axe des x dans le plan de l'aire. Décomposons celle-ci en rectangles infiniment petits par des parallèles aux axes de coordonnées, et soit ABA'B' l'un quelconque de ces rectangles, de dimensions $AB = \Delta x$, $AA' = \Delta y$. Appelons enfin y_1 l'ordonnée du point A, y'_1 celle

du point A′ et y celle du point g, centre du rectangle. Le volume engendré par ce rectangle en tournant autour de Ox est la différence des volumes de deux cylindres circulaires droits et a évidemment pour expression

$$\pi(y_1'^2 - y_1^2)\Delta x = \pi(y_1 + y_1')\Delta y . \Delta x ;$$

or, il est clair que

$$y_1 + y_1' = 2y,$$

de sorte que l'expression de ce volume devient

$$2\pi y \Delta x \Delta y .$$

Si donc V désigne le volume total, on a

$$V = 2\pi \Sigma y \Delta x \Delta y ;$$

or, $\Delta x . \Delta y$ est l'aire du petit rectangle ABA′B′ ; donc $\Sigma y \Delta x \Delta y$ représente le moment de l'aire totale parallèlement à Oy par rapport à un plan passant par Ox ; par conséquent, si Y est l'ordonnée du centre de gravité de l'aire, on a

$$\Sigma y \Delta x \Delta y = Y.S,$$

et par suite

$$V = 2\pi Y.S.$$

246. Remarque I. — Si la figure tourne seulement de l'angle α, on a

$$V = 2\pi Y.S. \frac{\alpha}{360}.$$

247. Remarque II. — Les deux théorèmes précédents portent le nom de théorèmes de Guldin ; ils sont exprimés par les deux formules

$$(1) \qquad A = 2\pi Y.L,$$

$$(2) \qquad V = 2\pi Y.S,$$

qui permettent de calculer A ou V quand on connaît le centre de gravité, L ou S.

Inversement, si l'on connaît A ou V ainsi que L ou S, on peut en déduire Y, c'est-à-dire une ordonnée du centre de gravité, ce qui suffit dans certains cas pour déterminer ce point. Nous allons appliquer à quelques exemples.

248. **Application I. — Surface et volume du tore de révolution.** — On sait que l'on appelle *tore de révolution* le volume engendré par un cercle tournant autour d'un axe situé dans son plan.

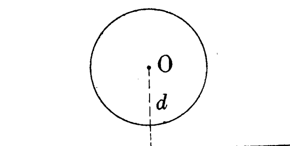


Fig. 78

Soit O′ (*fig.* 78) le cercle de rayon R et d la distance de son centre à l'axe. Le centre de gravité soit de la circonférence, soit du cercle étant le point O, en appelant S la surface et V le volume du tore, on a, en vertu des théorèmes de Guldin,

$$S = 2\pi R . 2\pi d = 4\pi^2 R d,$$

$$V = \pi R^2 . 2\pi d = 2\pi R^2 d.$$

249. **Application II. — Centre de gravité d'un arc de cercle.** — Soit l'arc AMB (*fig.* 79) de centre O et de rayon R. Son centre de gravité G est situé sur l'axe moyen Ox ; soit x l'abscisse de ce centre de gravité, et soient enfin L et c les longueurs respectives de l'arc et de la corde. En tournant autour de l'axe Oy perpendiculaire à Ox, l'arc AMB engendre une zone de hauteur c et dont l'aire a pour expression

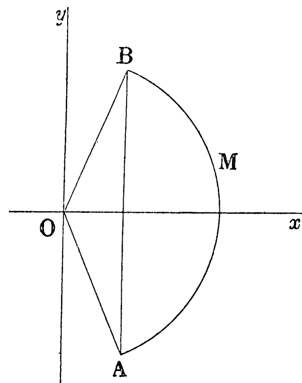


Fig. 79

$$2\pi R c ;$$

le premier théorème de Guldin donne donc

$$2\pi R c = 2\pi x L,$$

d'où

$$x = \frac{Rc}{L}.$$

250. **Application III. — Centre de gravité du secteur circulaire.** — Soit le secteur OAMB (*fig.* 79) ; désignons maintenant par x l'abscisse du centre de gravité du secteur situé sur le rayon moyen, comme dans l'application précédente, et gardons pour le reste les mêmes notations que dans le numéro précédent, puis faisons tourner le secteur autour de Oy ; il engendre alors un secteur sphérique dont le volume a pour expression

$$\frac{2}{3}\pi R^2 c.$$

Le deuxième théorème de Guldin donne alors

$$\frac{2}{3}\pi R^2 c = \frac{LR}{2} \cdot 2\pi x,$$

d'où

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{Rc}{4};$$

nous retrouvons ainsi les résultats déjà obtenus numéros 210 et 223.

251. **Travail de la pesanteur sur un système de points matériels.** — *Le travail de la pesanteur sur un système de points matériels qui subit un déplacement est égal au travail du poids total supposé appliqué au centre de gravité du système.*

Considérons en effet un système de n points matériels $A_1, A_2, \ldots A_n$, de poids respectifs $p_1, p_2, \ldots p_n$. Appelons $z_1, z_2, \ldots z_n$ les cotes positives ou négatives de ces points par rapport à un même plan horizontal H, dans la position initiale du système ; appelons de même $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ leurs cotes, par rapport au même plan H, dans une seconde position du système.

Le travail de la pesanteur sur un point quelconque A_i et quand le système passe de la première à la seconde position, est égal à $p_i(z_i - Z_i)$. Si donc on appelle T la somme de tous ces travaux, on a

$$T = \Sigma p_i(z_i - Z_i),$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs 1, 2,... n données à i.

Or, soient z et Z les cotes du centre de gravité du système dans la première et dans la seconde position ; on a (197)

$$\Sigma p_i(z_i - Z_i) = (z - Z)\Sigma p_i ;$$

par conséquent si P est le poids total du système, on aura

$$T = (z - Z)P,$$

ce qui démontre la proposition.

EXERCICES SUR LE LIVRE III

1. Trouver le centre de gravité de la moitié d'une branche de cycloïde représentée par les équations

$$x = a(1 - \cos\omega),$$
$$y = a(\omega + \sin\omega).$$

2. On donne la chaînette représentée par l'équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

trouver le centre de gravité d'un arc de cette courbe compris entre deux ordonnées équidistantes de l'axe des y.

3. Trouver le centre de gravité de l'une des moitiés symétriques de l'arc qui forme une boucle de la lemniscate de Bernouilli, représentée, en coordonnées polaires, par l'équation

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

4. Trouver le centre de gravité d'un arc d'hélice.

5. Trouver le centre de gravité d'un segment de cercle.

6. Trouver le centre de gravité de l'aire comprise entre un arc de parabole et sa corde.

7. Trouver le centre de gravité de l'aire comprise entre la cissoïde de Dioclès et son asymptote.

8. Trouver le centre de gravité de l'aire comprise entre une branche de cycloïde et sa base.

9. Trouver le centre de gravité d'une boucle de la lemniscate.

10. Trouver le centre de gravité d'une zone sphérique à une base.

11. Trouver le centre de gravité de la surface latérale d'un cône circulaire droit.

12. Trouver le centre de gravité d'une tranche sphérique comprise entre deux plans parallèles.

13. Trouver le centre de gravité d'une tranche de paraboloïde de révolution.

14. Trouver le centre de gravité du tétraèdre tronqué.

15. Trouver le centre de gravité du tronc de cône circulaire droit à bases parallèles.

16. Trouver le centre de gravité du segment de sphère à une base.

17. Trouver le centre de gravité du volume engendré par la révolution de l'aire comprise entre une parabole, son axe et une ordonnée perpendiculaire, autour de la tangente au sommet de la parabole.

18. Trouver le centre de gravité de la portion d'hyperboloïde engendrée par l'hyperbole

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax),$$

tournant autour de l'axe des x, et comprise entre les deux plans $x = 0$ et $x = c$.

19. Sur une droite et en des points également distants les uns des autres, on applique n poids dont chacun est représenté par un numéro d'ordre augmenté du poids précédent ; trouver la résultante et le centre de gravité du système.

20. Dans n rondelles d'égale épaisseur et de rayons proportionnels à 1, 3, 5, ... on découpe des secteurs ayant même angle au centre. On superpose ces secteurs dans leur ordre de grandeur et

de façon que leurs bords rectilignes soient situés dans deux plans verticaux. Montrer que les distances à l'intersection des deux plans, des centres de gravité de la pile ainsi formée et du premier secteur sont entre elles dans le rapport

$$\frac{3n(2n^2-1)}{4n^2-1}.$$

21. Dans un cône de révolution dont l'ouverture est 2α on inscrit n sphères tangentes entre elles ; le rayon de la sphère la plus rapprochée du sommet étant r, trouver la position du centre de gravité de ce système de sphères.

22. On donne une série de circonférences ayant leurs centres en ligne droite et tangentes entre elles extérieurement, de manière que chacune d'elles est tangente à celle qui la précède et à celle qui la suit. On suppose que les rayons forment une progression géométrique décroissante et l'on demande le centre de gravité du système prolongé à l'infini.

23. Un corps homogène est formé d'une sphère ayant un vide intérieur également sphérique. On connaît les rayons des deux sphères et la distance des centres ; déterminer le centre de gravité.

On suspend ce corps par un point A de sa surface extérieure défini par l'angle du rayon OA avec la ligne des centres OO′ ; calculer l'angle du rayon OA avec la verticale.

24. Soient O le centre et ABCD la base d'un cube de côté A ; on enlève de ce cube la pyramide OABCD et l'on demande de déterminer la position du centre de gravité du solide restant.

25. Deux boules sphériques pesantes A et A′, de masses m et m', sont liées l'une à l'autre par un fil inextensible et sans masse, de longueur l ; A peut glisser sans frottement dans une rainure pratiquée sur un plan horizontal, et une fente pratiquée dans la rainure laisse passer le fil AA′. On écarte la boule A′ de la verticale de manière que le plan de la rainure et de A′ soit vertical, et on abandonne A′ à elle-même sans vitesse initiale. Démontrer que le centre de gravité des deux boules décrit une verticale et trouver la trajectoire de A′.

26. Trouver le volume du tronc de cône circulaire droit en appliquant le théorème de Guldin.

27. Lorsque des forces se font équilibre autour d'un même point O, ce point est le centre de gravité d'un système de points également pesants placés aux extrémités des droites représentatives de ces forces.

28. Lorsque n forces sont appliquées au même point O, leur résultante passe par le centre de gravité G d'un système de n poids égaux placés aux extrémités des forces, et elle est égale à $n \times \mathrm{OG}$.

29. On considère un système de n points matériels pesants $A_1, A_2, \ldots A_n$, de poids respectifs $p_1, p_2, \ldots p_n$, et une droite Δ; on mène les perpendiculaires A_1a_1, $A_2a_2, \ldots$ A_na_n sur Δ et l'on pose

$$S = p_1 . \overline{A_1 a_1}^2 + \ldots + p_n . \overline{A_n a_n}^2.$$

Soit Δ' la parallèle à Δ menée par le centre de gravité du système des n points, et soient $A_1 \alpha_1, \ldots A_n \alpha_n$ les perpendiculaires abaissées de ces points sur Δ'.

On pose encore

$$S_0 = p_1 . \overline{A_1 \alpha_1}^2 + \ldots . + p_n . \overline{A_n \alpha_n}^2,$$

et l'on désigne par d la distance des deux parallèles Δ et Δ'; prouver que l'on a

$$S = S_0 + (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)d^2.$$

30. Trouver le centre de gravité du secteur sphérique.

31. Un point matériel, de masse m, décrit une conique de manière que sa projection sur un axe est animée d'un mouvement uniforme donné ; un autre point, de masse m', décrit uniformément une autre droite située dans le même plan. Démontrer que le centre de gravité du système décrit une autre conique.

32. On donne un hexagone régulier ABCDEF, de côté $AB = a$, et l'on en détache le triangle ABC formé par trois côtés consécutifs. Déterminer le centre de gravité G de la surface pentagonale ACDEF.

Trouver ensuite la résultante de cinq forces appliquées en G et représentées par les longueurs GA, GC, GD, GE, GF.

33. Un cercle matériel peut tourner librement autour de son centre O supposé fixe. Sur la circonférence de ce cercle on donne trois points A, B, C et on applique en A et B deux forces F_1 et F_2 données en grandeur et direction ; on demande d'appliquer au point C une troisième force F_3 telle que le système soit en équilibre. Il y a une infinité de solutions ; trouver la plus petite force F_3 répondant à la question.

34. Étant donné un triangle ABC, on prend un point P sur le cercle des neuf points et l'on suppose ce point soumis aux trois forces représentées par les droites PA, PB, PC; trouver le lieu de l'extrémité de la résultante de ces trois forces.

35. Soient A, B, C trois points en ligne droite et O un point quelconque situé en dehors de cette droite. On suppose que OA, BO et CO représentent trois forces en grandeur et en direction ; montrer que leur résultante coupe la droite ABC en un point D, tel que $AB = CD$.

36. On donne une force F en grandeur et en position, et l'on considère tous les points par rapport auxquels les moments de la force sont égaux en grandeur ; trouver :

1° Le lieu de tous ces points dans l'espace ;

2° Le lieu de ces points dans un plan passant par la force ou perpendiculaire à celle-ci ;

3° Le lieu des extrémités de ces moments.

37. On considère toutes les forces qui sont appliquées en un point donné et qui ont un moment connu par rapport à un point donné ; trouver :

1° Le lieu des extrémités de ces forces ;

2° Les points de ce lieu qui sont dans un plan.

38. Trouver le lieu des points de l'espace par rapport auxquels les moments de deux forces données ont des grandeurs données.

39. Trouver un point par rapport auquel les moments de deux forces données soient donnés, l'un seulement en grandeur, l'autre en grandeur, direction et sens.

40. Si quatre forces se font équilibre autour d'un solide invariable, on peut considérer leurs directions comme des génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe.

41. Démontrer, en s'appuyant sur les six équations d'équilibre, que si trois forces se font équilibre autour d'un solide invariable, elles sont situées dans le même plan.

42. Étant donné un polygone plan ABCDEA, on applique en A, suivant AB, une force égale à AB; en B, suivant BC, une force égale à BC; et ainsi de suite jusqu'au point E, auquel on applique, suivant EA, une force égale à EA; réduire toutes ces forces à une résultante et à un couple et évaluer le moment du couple résultant.

43. On donne dans un plan un contour polygonal ABCD; aux milieux des côtés et perpendiculairement à ces côtés on applique des forces égales à ces mêmes côtés et dirigées toutes à droite du contour, par rapport à un observateur qui marcherait le long de la ligne brisée ABCD dans le sens indiqué par l'ordre alphabétique des lettres. Trouver la résultante des forces ainsi définies.

44. De quelque manière qu'on réduise à deux toutes les forces appliquées à un corps solide, le tétraèdre construit sur les droites qui représentent ces forces a un volume constant.

45. Quand un système de forces a une résultante unique, ou peut se réduire à un couple unique, la somme algébrique des tétraèdres construits sur ces forces, prises deux à deux de toutes les manières possibles, est égale à zéro. On convient, d'ailleurs, d'affecter le volume du tétraèdre construit sur deux forces F et φ du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que le moment de l'une de ces forces par rapport à un axe coïncidant avec l'autre, est positif ou négatif.

NOTE I

SUR DEUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Théorème I. — *Si une figure plane a un diamètre, des portions de surfaces correspondantes sont équivalentes.*

Soit D (*fig.* 80) le diamètre; je dis que les deux triangles correspondants ABC, A'B'C' sont équivalents. En effet, les cordes AA', BB', CC' sont parallèles et coupées par D en leurs milieux

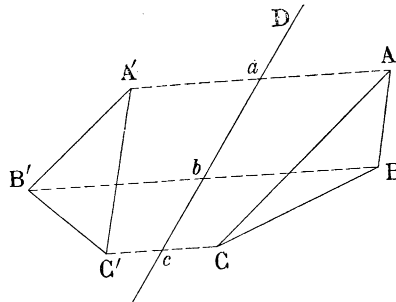


Fig. 80

a, b, c. Dès lors deux trapèzes correspondants quelconques abAB, abA'B', par exemple, sont équivalents parce qu'ils ont même hauteur et des bases respectivement égales, $a\text{A} = a\text{A}'$ et $b\text{B} = b\text{B}'$. Il en résulte que la somme algébrique

$$\text{Surf. } ab\text{AB} + \text{Surf. } bc\text{BC} - \text{Surf. } ac\text{AC}$$

est égale a la somme algébrique

$$\text{Surf. } ab\text{A}'\text{B}' + \text{Surf. } bc\text{B}'\text{C}' - \text{Surf. } ac\text{A}'\text{C}'.$$

Mais la première somme représente la surface du triangle ABC, tandis que la deuxième représente celle du triangle A'B'C'; on en conclut

$$\text{Surf. ABC} = \text{Surf. A'B'C'}.$$

Deux triangles correspondants étant équivalents, deux polygones correspondants, décomposables en triangles équivalents, le sont aussi, et par des considérations de limites on étendrait le théorème au cas d'aires planes quelconques.

Théorème II. — *Si une figure a un plan diamétral, deux volumes correspondants sont équivalents.*

Par un raisonnement analogue au précédent, on voit qu'il suffit de démontrer le théorème pour deux tétraèdres correspondants. Soient donc P (*fig.* 81) le plan diamétral, ABCD, A'B'C'D' deux tétraèdres correspondants, c'est-à-dire tels que les droites AA',

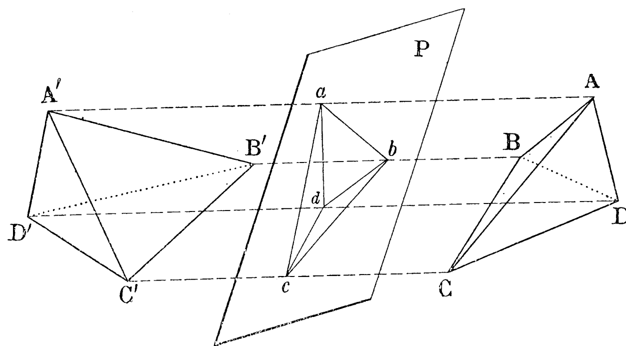


Fig. 81

BB', CC', DD' sont parallèles et coupées par le plan P en leurs milieux *a*, *b*, *c*, *d*. Considérons deux troncs de prismes correspondants quelconques *abc*ABC, *abc*A'B'C', par exemple.

On sait qu'ils sont équivalents chacun à la somme de trois pyramides ; or, deux pyramides correspondantes *abc*A, *abc*A', par exemple, ont même base et des hauteurs égales ; donc elles sont équivalentes, et par suite deux troncs de prismes correspondants sont équivalents. Bornons-nous au cas de figure où le point *d* tombe à l'intérieur du triangle *abc* et où les points D et D' sont

extérieurs au tronc de prisme ABCA'B'C' ; alors la somme algébrique

$$\text{Vol. } abd\text{ABD} + \text{Vol. } bcd\text{BCD} + \text{Vol. } cad\text{CAD} - \text{Vol. } abc\text{ABC}$$

est égale à la somme algébrique

$$\text{Vol. } abd\text{A'B'D'} + \text{Vol. } bcd\text{B'C'D'} + \text{Vol. } cad\text{C'A'D'} - \text{Vol. } abc\text{A'B'C'}.$$

Mais *la première* somme représente le volume du tétraèdre ABCD, tandis que la deuxième représente le volume du tétraèdre A'B'C'D' ; on a donc

$$\text{Vol. ABCD} = \text{Vol. A'B'C'D'}.$$

La démonstration serait la même si la figure était disposée autrement ; il n'y aurait de différence que dans le signe dont il faudrait affecter le volume de chaque tronc de prisme.



NOTE II

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES POUR UN POINT MATÉRIEL

Le principe des vitesses virtuelles permet de faire rentrer dans un même énoncé les conditions d'équilibre d'un système quelconque. Nous nous bornerons à l'établir pour un point matériel.

Définitions. – Lorsqu'un point matériel est en mouvement, on appelle *déplacement virtuel* tout déplacement infiniment petit que l'on peut concevoir donné au point matériel.

On appelle alors *travail virtuel* celui des forces qui agissent sur le point pour un déplacement virtuel de ce point.

Principe des vitesses virtuelles. – 1° *Point matériel libre.* — *Lorsqu'un point matériel libre est en équilibre sous l'action de plusieurs forces, la somme algébrique des travaux élémentaires de ces forces, pour un déplacement quelconque, est nulle.*

En effet, cette somme est égale au travail de la résultante ; or, la résultante est nulle, par suite son travail est nul, et il en est de même de la somme des travaux élémentaires de toutes les forces qui agissent sur le point.

Réciproquement, si la somme algébrique des travaux élémentaires de toutes les forces qui agissent sur un point matériel libre est nulle, le point est en équilibre ; car le travail de la résultante est nul pour tout déplacement, ce qui exige que la résultante soit nulle elle-même, et par suite que le point soit en équilibre.

D'après cela, soient X_i, Y_i, Z_i les composantes, suivant trois axes, des forces qui agissent sur le point. Pour ne pas confondre

avec les différentielles, désignons par δx, δy, δz, les composantes, suivant les mêmes axes, d'un déplacement quelconque ; nous devrons avoir, pour que le point matériel soit en équilibre,

$$\delta x . \Sigma X_i + \delta y . \Sigma Y_i + \delta z . \Sigma Z_i = 0,$$

et cela quels que soient δx, δy, δz, ce qui conduit aux trois équations d'équilibre établies précédemment :

$$\Sigma X_i = 0, \qquad \Sigma Y_i = 0, \qquad \Sigma Z_i = 0.$$

2º *Point matériel assujetti à glisser sans frottement sur une surface ou sur une ligne.*

Considérons maintenant un point matériel assujetti à glisser sans frottement sur une surface et soumis à l'action de plusieurs forces F_1, F_2,... F_n. Nous avons vu que l'on peut considérer ce point comme libre, pourvu que l'on joigne aux forces F_1, F_2,.. F_n, qui sollicitent le point, la réaction normale N de la surface. Si donc X_i, Y_i, Z_i sont les composantes de la force F_i suivant trois axes et X, Y, Z celles de N suivant les mêmes axes, on aura, en vertu du théorème précédent, et pour tout déplacement δx, δy, δz,

$$(1) \qquad (X + \Sigma X_i)\delta x + (Y + \Sigma Y_i)\delta y + (Z + \Sigma Z_i)\delta z = 0.$$

Parmi les déplacements du point, considérons seulement ceux qui sont sur la surface ou, comme on a l'habitude de dire, *ceux qui sont compatibles avec les liaisons* ; tous ces déplacements étant normaux à N, le travail de N est nul, de sorte que dans l'égalité (1) la somme $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$ est nulle et l'égalité se réduit à

$$\delta x . \Sigma X_i + \delta y \Sigma Y_i + \delta z \Sigma Z_i = 0,$$

sous la condition que δx, δy, δz sont les composantes d'un déplacement quelconque sur la surface. On conclut de là que *si un point matériel assujetti à glisser sans frottement sur une surface est en équilibre, la somme algébrique des travaux élémentaires des forces qui agissent sur le point est nulle pour tout déplacement conçu sur la surface.*

La réciproque est vraie ; car si la somme des travaux élémentaires, pour tout déplacement conçu sur la surface, est nulle, la résultante des forces qui agissent sur le point est normale à la surface, puisqu'elle est normale à tout déplacement sur la surface, et, par suite, le point est en équilibre. En résumé, pour qu'un point matériel assujetti à glisser sans frottement sur une surface soit en équilibre, *il faut et il suffit que la somme algébrique des*

travaux virtuels de toutes les forces directement appliquées au point soit nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons.

Le théorème ainsi énoncé s'étend à un point matériel libre ou assujetti à glisser sans frottement sur une ligne, et porte le nom de *principe des vitesses virtuelles*.

Appliquons-le, par exemple, à la recherche des conditions d'équilibre d'un point assujetti à glisser sans frottement sur une surface. Soient

$$f(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

l'équation cartésienne de la surface et X, Y, Z les composantes, suivant les axes, de la résultante des forces directement appliquées au point. En vertu du principe des vitesses virtuelles, on doit avoir

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0 \tag{3}$$

pour tout déplacement δx, δy, δz sur la surface représentée par l'équation (2), c'est-à-dire pour toutes les valeurs de δx, δy et δz satisfaisant à la relation

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0. \tag{4}$$

Cela revient à dire évidemment que l'on peut déterminer un facteur $-\lambda$ tel que l'équation

$$\left(X - \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y - \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y + \left(Z - \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z = 0$$

soit identiquement satisfaite, quels que soient δx, δy, δz ; on en conclut les équations d'équilibre déjà trouvées :

$$X = \lambda\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$Y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$Z = \lambda\frac{\partial f}{\partial z}.$$

On trouverait de même les équations d'équilibre d'un doint assujetti à rester sur une ligne.

Annales de l'agrégation des sciences mathématiques. — In-12. Années 1876 à 1891 . . . . 8 fr. 75.

Annales de la licence ès sciences. — In-12. Années 1888 à 1891 . . . . 12 fr. »

BASIN (J.), professeur agrégé au lycée de Coutances. — **Leçons de chimie** (chimie générale, chimie organique, analyse chimique). — In-12 . . . . 3 fr. 50.

DESSENON (E.), ancien élève de l'école normale, professeur agrégé au lycée Saint-Louis. — **Cours de trigonométrie rectiligne.** — In-8° . . . . 3 fr. 50.

GARIEL (C.-M.), membre de l'Académie de médecine, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de médecine et à l'École des ponts et chaussées. — **Études d'optique géométrique.** — Gr. in-8° . . . . 5 fr. »

JAMET (V.), docteur ès sciences. — **Essai d'une nouvelle théorie élémentaire des logarithmes.** — In-8° . . . . . . 0 fr. 60.

MACÉ DE LÉPINAY (A.), ancien élève de l'école normale, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV. — **Compléments d'algèbre et notions de géométrie analytique.** — In-8° . . . . 4 fr. »

MATROT (A.), ingénieur en chef des mines. — **Démonstration élémentaire du théorème de Bachet.** — In-8° . . 0 fr. 60.

MOSNAT (E.), professeur agrégé au lycée de Toulon. — **Problèmes de géométrie analytique.** — 2 vol. in-8°. . . . . . 12 fr. »

PIALAT (R.), ingénieur. — **Caractères des sels métalliques.** — In-12, 2[e] édition . . . . 2 fr. 50.

PILLET (J.), professeur à l'école des beaux-arts, à l'école des ponts et chaussées et à l'école polytechnique. — **Traité de géométrie descriptive.** — In-4° . . . . 12 fr. »

REBIÈRE (A.), ancien élève de l'école normale, professeur agrégé au lycée Saint-Louis. — **Mathématiques et Mathématiciens.** — Un vol. in-8° . . 3 fr. 50. — Édition Hollande . 7 fr. 50.

RÉMOND (A.), ancien élève de l'école polytechnique, professeur de mathématiques spéciales à Sainte-Barbe. — **Résumé de géométrie analytique.** — In-8° . . . . 4 fr. »

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par M. Niewenglowski, docteur ès sciences, avec la collaboration de MM. Charruit, Dessenon, Laviéville, Papelier, Tartinville et Vuibert. — In-4°. Abonnement actuel (d'octobre) : France, 7 fr. Étranger, 8 fr. — L'année 1890-91 est en vente au prix de 7 fr.

RIVIÈRE (Ch.), ancien élève de l'école normale, docteur ès sciences physiques, professeur agrégé au lycée Saint-Louis. — **Problèmes de physique et de chimie** à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales. — In-8° . . . . 5 fr. »

TARTINVILLE (A.), ancien élève de l'école normale, professeur agrégé au lycée Saint-Louis. — **Cours d'arithmétique.** — In-8°, 2[e] édition . . . . 5 fr. »

TARTINVILLE (A.). — **Théorie des équations et des inéquations** du premier et du second degré à une inconnue. — Gr. in-8°, 2[e] édition. . . . . 3 fr. 50.

Imprimerie Comte-Jacquet, Bar-le-Duc.